Claire David
Pierre Gosselet

Équations aux dérivées partielles

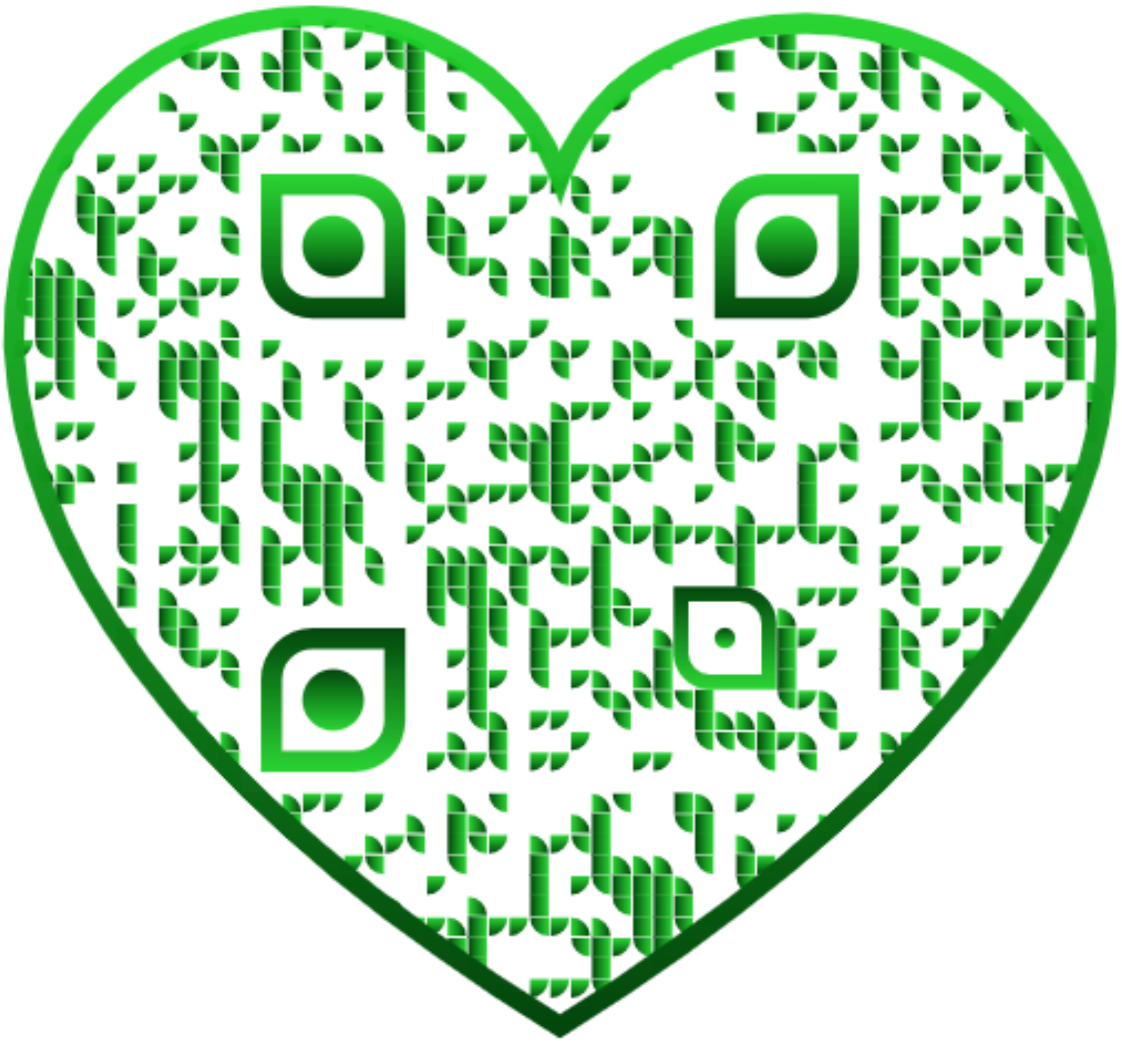
Cours et exercices corrigés

2e édition

RESSOURCES NUMÉRIQUES

Licence
Écoles d'ingénieurs

DUNOD



Clair
Pierr

Équations aux dérivées partielles

Cours et exercices corrigés

2e édition

DUNOD

Illustration de couverture : © Baillou - Fotolia.fr

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, 2012, 2015

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-072746-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos VII

Notations IX

Chapitre 1. Généralités 1

1.1 Premières définitions 1
1.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires en mécanique 5

Chapitre 2. Équations aux dérivées partielles du premier ordre 17

2.1 Préambule : étude d'un système différentiel de la forme $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ 17
2.2 Équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre 23
Exercices 30
Corrigés 31

Chapitre 3. Équations aux dérivées partielles du second ordre 33

3.1 Classification des équations 33
3.2 Courbes caractéristiques et problème de Cauchy 35
3.3 Réduction à la forme standard 40
Exercices 49
Corrigés 51

Chapitre 4. Distributions 55

4.1 Motivation 55
4.2 Espace des fonctions tests 57
4.3 Espace des distributions 60
4.4 Dérivation d'une distribution 66
4.5 Opérations 68
4.6 Distributions tempérées 73
Exercices 75
Corrigés 77

Chapitre 5. Transformations intégrales 83

5.1 Transformation de Fourier 83
5.2 Transformation de Laplace 90
Exercices 99
Corrigés 106

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 6. Méthode de séparation des variables 117

6.1 Fonctions à variables séparées 117
6.2 Problème de Sturm-Liouville 120
6.3 Séparation des variables 126
Exercices 135
Corrigés 140

Chapitre 7. Quelques équations aux dérivées partielles classiques 153

7.1 Équation de transport 153
7.2 Équation des ondes 158
7.3 Équation de la chaleur 164
7.4 Équation de Laplace 166
7.5 Une équation aux dérivées partielles classique en finance : l'équation de Black-Scholes 178

Chapitre 8. Introduction aux approches variationnelles 183

8.1 Principe des approches variationnelles 183
8.2 Problème variationnel abstrait 189
8.3 Notions sur la régularité de la solution faible 195
8.4 Traitement de quelques EDP 195
8.5 Techniques d'approximation de Ritz-Galerkin 200
Exercices 202
Corrigés 204

Annexe A. Rappels d'analyse et de géométrie 215

A.1 Fonctions de plusieurs variables 215
A.2 Éléments de géométrie 217

Annexe B. Éléments d'analyse hilbertienne 221

B.1 Définitions 221
B.2 Complétude 226
B.3 Sommes hilbertiennes 229
B.4 Projection sur un convexe fermé 233
B.5 Dualité dans les espaces de Hilbert 237

Annexe C. Éléments d'intégration de Lebesgue 241

C.1 Motivation 241
C.2 Rapide construction de l'intégrale de Lebesgue 242
C.3 Résultats importants 245
C.4 Comparaison Riemann-Lebesgue 247
C.5 Intégrales multiples 247
C.6 Espaces de Lebesgue 248
C.7 Produit de convolution de deux fonctions 252
C.8 Résultats de densité et de séparabilité 253

Annexe D. Propriétés de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ 255

D.1 Structure algébrique 255
D.2 Régularité des fonctions, notion de trace 257
D.3 Inégalités de Poincaré 260

Bibliographie 265

Index 266

Vous pouvez accéder à des exercices corrigés supplémentaires à partir de la page de présentation de l'ouvrage sur le site de l'éditeur www.dunod.com.
Ces compléments sont au format pdf et permettent une recherche classique par mots-clés. Ils peuvent être lus, enregistrés ou imprimés en partie comme en totalité.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est une introduction à l'étude des équations aux dérivées partielles. Il est destiné aux étudiants de niveau L3 et M1 des écoles d'ingénieurs et filières universitaires scientifiques. Il se base sur un cours de L3 donné aux étudiants en ingénierie mécanique de l'ENS de Cachan et de l'université Pierre et Marie Curie-Paris 6.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) apparaissent extrêmement fréquemment en sciences appliquées pour traduire des principes fondamentaux et modéliser de manière continue des phénomènes physiques. Face à cela, les étudiants se retrouvent souvent désarmés : les ouvrages dans ce domaine font généralement appel à des prérequis complexes, donnent des exposés trop généraux pour faire le lien avec des applications, ou au contraire éludent les fondations et se spécialisent sur certains aspects. L'étude des EDP est en effet un sujet très vaste, sur lequel les ouvrages de référence peuvent contenir plusieurs milliers de pages.

Cette seconde édition, revue et augmentée, est, encore, le fruit d'un compromis. Si notre but est, toujours, de donner les éléments nécessaires à la compréhension des EDP qui jalonnent le monde des sciences appliquées, de savoir les interpréter, au sens classique et généralisé, connaître leurs principales propriétés et, lorsque cela est possible, les résoudre, il nous a semblé important, en regard, d'introduire aussi les approches variationnelles qui font le lien entre les EDP théoriques et le calcul numérique. Ces méthodes sont, en effet, à la base de techniques d'approximation robustes extrêmement utilisées en ingénierie, dont il est intéressant de connaître le principe directeur.

L'objectif du premier chapitre est de donner le vocabulaire de base et de discuter, de manière assez empirique, des propriétés fondamentales des EDP les plus fréquentes en physique. Nous nous intéressons ensuite à l'analyse classique d'équations du premier et second ordre. Nous introduisons notamment la notion de courbe caractéristique d'une EDP.

Dans le chapitre quatre, nous donnons les fondements de l'interprétation généralisée des EDP en introduisant le concept de distributions. Ces dernières sont un outil extrêmement, puissant puisqu'elles offrent un cadre plus large pour manier les EDP, notamment en présence de discontinuités, et fournissent de nouveaux outils pour leur étude.

Nous développons aussi quelques éléments d'analyse spectrale (transformation de Fourier et Laplace pour les domaines non bornés et séparation de variables pour les domaines bornés) dont l'intérêt dépasse l'étude des EDP, et qui permettent dans certains cas d'obtenir facilement des solutions d'équations aux dérivées partielles.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Le chapitre qui suit est consacré à l'étude d'équations classiques (de transport, de la chaleur, des ondes, de Laplace) à l'aide des outils introduits aux chapitres précédents.

Le dernier chapitre est une introduction aux approches variationnelles, qui offrent un cadre théorique riche dans lequel il est possible de prouver l'existence et l'unicité de la solution de certaines EDP.

À la fin de chaque chapitre se trouve une sélection d'exercices types, avec, bien sûr, leurs corrigés détaillés. Ceux-ci se veulent volontairement simples, sans complication calculatoire.

Quatre annexes complètent cet ouvrage. La première est une remise en forme pour se réapproprier les bases de géométrie et calcul différentiel. La deuxième est consacrée à l'analyse hilbertienne, et donne les résultats nécessaires concernant les espaces de Banach et de Hilbert. La troisième annexe concerne l'intégration de Lebesgue et les espaces fonctionnels associés ; il s'agit de permettre au lecteur non spécialiste de comprendre comment cette théorie de l'intégration conduit à un cadre simple pour déployer les méthodes présentées dans l'ouvrage. La dernière annexe présente les propriétés fondamentale de l'espace de Sobolev dans lequel les méthodes variationnelles sont déployées.

La bibliographie recense quelques ouvrages de référence, permettant d'approfondir le sujet.

Nous tenons à remercier Valentine Rey et Emmanuel Trélat pour leur relecture attentive et leurs suggestions pertinentes.

Claire David
Pierre Gosselet

NOTATIONS

- **Ensemble et topologie**
  - $\partial\Omega$ bord du domaine Ω.
  - χ_A pour $A \subset \Omega$: fonction indicatrice de A : $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus A \end{cases}$
- **Espaces fonctionnels**
  - $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ espace de Lebesgue des fonctions dont la puissance $p^{\text{ième}}$ est intégrable sur Ω.
  - $L^\infty(\Omega)$, espace de Lebesgue des fonctions essentiellement bornées sur Ω.
  - $C^0(\Omega)$, espace des fonctions continues sur Ω.
  - $C^n(\Omega)$, $n \in [\![1, \infty]\!]$, espace des fonctions n fois continument dérivables.
  - $C_c^n(\Omega)$, $n \in [\![0, \infty]\!]$, espace des fonctions de classe $C^n(\Omega)$ à support compact.
  - $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$, espace des fonctions infiniment dérivables à support compact, espace des fonctions tests pour les distributions.
  - $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, espace des fonctions à décroissance rapide, espace des fonctions tests pour les distributions tempérées.
  - $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, espace des fonctions infiniment dérivables sur Ω, espace des fonctions tests pour les distributions à support compact.
- **Opérations sur les fonctions et les distributions**
  - $\text{supp}(f)$, support de la fonction f.
  - pour une fonction réelle de la variable réelle : f' dérivée première de f, f'' dérivée seconde, $f^{(j)}$ dérivée j-ème.
  - $f * g$, produit de convolution
- **Notation multientier :** $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.
  - $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$.
  - $x \in \mathbb{R}^d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_d^{\alpha_d}$ monôme.
  - $f \in C^N(\mathbb{R}^d)$ avec $N \geqslant |\alpha|$, $\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

- **Opérateurs différentiels**
  - Gradient spatial d'une fonction scalaire : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$.
  - Dérivée normale :
$$\frac{\partial f}{\partial n} = df(\vec{n}) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{n}.$$
  - Divergence spatiale d'un champ de vecteur : $\text{div}(\vec{p}) = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}$.
  - Laplacien d'un champ scalaire : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
- **Opérations dans un espace vectoriel E**
  - E', dual topologique de E.
  - $\langle g, h \rangle = g(h) \in \mathbb{R}$, crochet de dualité avec $h \in E$ et $g \in E'$.
  - $(g, h)_E$ produit scalaire avec $g \in E$ et $h \in E$.
  - $\|h\|_E$ norme de $h \in E$.

GÉNÉRALITÉS 1

1.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

Une *Équation aux Dérivées Partielles* (*EDP*) est une équation fonctionnelle qui met en relation des dérivées partielles. Typiquement, si u est une fonction à valeurs scalaires des variables x et y, $(x, y) \in \Omega$, où Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$, une *EDP* est une relation de la forme :

$$\mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{pour } (x, y) \in \Omega \tag{1.1}$$

où $\mathcal{F}$ désigne une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

L'***ordre*** d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation. L'équation (1.1) est donc d'ordre 1.

La ***dimension*** d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u. L'équation (1.1) est donc de dimension 2.

Résoudre l'*EDP* consiste donc à déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω satisfaisant (1.1).

En général, une *EDP* est complétée par des conditions sur le bord de Ω du type :

$$\mathcal{G}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{pour } (x, y) \in \Gamma \subset \partial\Omega \tag{1.2}$$

Ces conditions peuvent être de nature très différentes et influent fortement sur l'existence et la forme des solutions. Quand les conditions portent sur le bord complet du domaine, on parle de **problème aux frontières**. Quand le domaine est d'extension infinie autour d'un obstacle compact (par exemple lors de l'étude de la signature radar d'un objet), on parle de **problème extérieur**.

Quand les conditions ne portent que sur une partie du bord du domaine sur lequel on connaît la valeur de la fonction et de ses dérivées de degré inférieur à l'ordre de l'équation, on parle de **problème de Cauchy**.

Les équations de la physique sont fréquemment posées sur des domaines spatio-temporels du type $\Omega = \omega \times [t_0, +\infty[$, où ω est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) et $[t_0, +\infty[$ est l'intervalle temporel d'étude, t_0 est l'instant initial (souvent pris égal à 0). Le temps joue un rôle particulier, dans la mesure où il est porteur du *principe de causalité*†. On a alors le plus souvent un problème aux frontières en espace et un

†. C'est le principe suivant lequel, si un phénomène physique, nommé *cause*, produit un autre phénomène, l'*effet*, alors ce dernier ne peut précéder la cause.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

problème de Cauchy en temps que l'on appelle également **problème aux conditior initiales**.

Les problèmes aux frontières et les problèmes aux conditions initiales obéisser à des logiques différentes : pour les premiers, l'état est partiellement connu sur le bords et on cherche à l'aide de l'*EDP* à déterminer la solution dans l'ensemble d domaine ω, pour les seconds, l'état est complètement connu à l'instant initial t_0 on va chercher à propager la solution à l'instant d'après puis, de proche en proche, déterminer la solution sur l'ensemble de l'intervalle temporel d'étude.

Il n'existe pas de résultats généraux sur l'existence de solutions des équations au dérivées partielles, il est nécessaire de restreindre l'étude à certains cas. On donn donc, dans ce qui suit, une rapide classification des *EDP* et des conditions aux limite

Définition 1.1 Classification des EDP

Cette classification est illustrée dans le cas d'équations du second ordre.

i. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est ***linéaire*** si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)\,u + g(x,y) = 0$$

L'équation est dite ***homogène*** si la fonction g est identiquement nulle sur Ω.

ii. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est ***semi-linéaire*** si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé est linéaire :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

où a, b, c désignent des fonctions des variables x et y, et $\mathcal{F}$ une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

iii. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est ***quasi-linéaire*** si elle est de la forme :

$$a\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

où a, b, c et $\mathcal{F}$ sont des fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

iv. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est ***complètement non linéaire*** si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

Cet ouvrage traite plus particulièrement d'équations aux dérivées partielles fréquemment rencontrées en physique, du premier ordre quasi-linéaires et du second ordre semi-linéaires.

Définition 1.2 Classification des conditions aux limites

i. On appelle ***condition de Dirichlet*** une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord $\partial\omega$. Un ***problème du premier type*** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Dirichlet.

ii. On appelle ***condition de Neumann*** une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord $\partial\omega$. Un ***problème du deuxième type*** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Neumann.

iii. On appelle ***condition de Fourier-Robin*** une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord $\partial\omega$.

iv. On appelle ***problème du troisième type*** un problème où les conditions sont de types différents sur des portions du bord.

Remarque 1.1

Dans le cas d'un problème extérieur, l'*EDP* est généralement complétée par un comportement asymptotique à l'infini.

Le concept même de recherche de solution(s) d'une équation aux dérivées partielles n'est pas forcément très clair, et nécessite d'être reprécisé pour chaque problème.

Un repère important est la notion de *problème bien posé.*

Définition 1.3

Un problème est *bien posé au sens de Hadamard* s'il *existe* une *unique* solution qui *dépend des données de façon continue*†.

La dernière condition est particulièrement significative en physique. Une *EDP* traduit en général des principes physiques (comme la conservation de la masse,

†. Cette définition suppose le choix d'une mesure « raisonnable » des variations des données.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

de l'énergie, de la quantité de mouvement) et des modèles (comme la relation effort/déformation dans un ressort, la loi de la gravitation) dans lesquels on peut avoir une confiance raisonnable. Les données (les valeurs des coefficients, conditions aux limites imposées) sont souvent le résultat de mesures et donc peu fiables. Il est souhaitable que la solution de l'équation aux dérivées partielles présente une certaine stabilité si les données venaient à être légèrement perturbées.

Une première limite du concept de problème bien posé apparaît pour les problèmes physiques où il est connu et souhaité que la solution de l'équation aux dérivées partielles ne soit pas unique (par exemple, dans l'étude des régimes turbulents en mécanique des fluides). Il faut alors classer les solutions en fonction de leurs propriétés (régularité, dimensions caractéristiques, etc.).

Une seconde limite est que le caractère bien posé peut dépendre de la façon dont on recherche la solution. Par exemple, une des premières techniques d'étude des équations aux dérivées partielles consistait à chercher des solutions analytiques (i.e. développables en série entière). Il a été démontré depuis qu'il existe des problèmes avec une unique solution analytique, mais de nombreuses autres solutions (même infiniment dérivables). De tels problèmes sont donc bien posés au sens des fonctions analytiques, mais mal posés dans un cadre plus général.

La question de la régularité† des solutions d'une équation aux dérivées partielles est souvent au cœur de son étude.

Le fait qu'une équation aux dérivées partielles présente des dérivées partielles d'ordre k suggère assez naturellement de chercher une solution au moins k fois dérivable ; c'est ce que l'on appelle le *cadre classique* (ceci dit, le fait de mettre en relation une fonction et ses dérivées suggère que toutes ont la même régularité, ce qui conduirait à des solutions infiniment dérivables, d'où la légitimité de chercher des solutions analytiques).

Le cadre classique peut se montrer trop restrictif : les discontinuités sont fréquentes en physique (ondes de choc, hétérogénéités), et il peut être souhaitable de placer l'équation aux dérivées partielles dans un cadre plus large où les solutions peuvent présenter des irrégularités. Dans ce cadre, abordé au chapitre 4, on parle de *solutions faibles* ou *solutions généralisées*. Cependant, le fait d'interpréter l'équation aux dérivées partielles au sens faible n'empêche pas de chercher des solutions classiques : une fois qu'une solution faible a été obtenue, on peut chercher à prouver qu'elle possède en fait des propriétés de régularité au sens « classique » (continuité, dérivabilité, etc.). Des outils puissants permettant de prouver l'existence, l'unicité, la régularité de solutions au sens faible sont présentés au paragraphe après.

†. Le terme régularité est un raccourci pour parler des propriétés de continuité, dérivabilité (classique ou faible) d'une fonction, et de l'appartenance de la fonction et de ses dérivées à certains espaces de Lebesgue.

On aborde dans cet ouvrage quelques outils de fond pour comprendre les *EDP* et quelques techniques de résolution analytique. Très souvent, pour une équation donnée, une technique adaptée donne une unique solution ; il faut garder en mémoire que celle-ci n'est pas nécessairement la seule solution de l'équation. Néanmoins, les exemples et exercices proposés dans cet ouvrage ne concernent que des problèmes bien posés pour lesquels on admettra l'existence et l'unicité de la solution : on pourra légitimement parler de la (seule) solution.

1.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires en mécanique

Cette section a pour objectif de présenter des équations classiques et certaines de leurs propriétés fondamentales pour le physicien, que ce soit pour contrôler la validité d'un modèle, ou bien pour orienter les méthodes de calcul. Les configurations étudiées sont volontairement simples et certains résultats admis, les chapitres suivants permettront de donner de la rigueur et de généraliser cette présentation.

1.2.1 Équation de transport

Considérons un contaminant de concentration μ dans un fluide en mouvement, où le champ de vitesse $\vec{v}$, fonction des variables d'espace (x, y) et du temps t, est donné.

En l'absence de source répartie, la conservation de la matière conduit à l'équation :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

appelée *équation d'advection.*

Si on suppose que le fluide support est incompressible ($\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$), on obtient l'*équation de transport* :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\mu).\vec{v} = 0 \tag{1.3}$$

Cette équation du premier ordre gouverne les *phénomènes convectifs* (i.e. le contaminant est transporté par le fluide), mais apparaît aussi dans certains modèles de marchés boursiers (*équation de Black-Scholes* présentée en 7.5).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Considérons le cas unidimensionnel en espace :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + v\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

Si on suppose de plus que la vitesse v est constante, il apparaît clairement que toute fonction de la forme :

$$(x, t) \mapsto \mu(x, t) = \tilde{\mu}(x - vt) \tag{1.5}$$

est solution.

L'étude de l'*EDP* seule a donc conduit à une famille de solutions. Intéressons-nous maintenant à un problème aux limites complet.

Considérons donc le domaine $]x_0, x_1[\times]t_0, +\infty[$, et supposons que l'on connaît la concentration μ_0 à l'instant t_0 en tout point (problème à valeur initiale).

Il s'agit donc de résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial t} + v\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \\ \mu(x, t_0) = \mu_0(x) \ \forall x \in]x_0, x_1[\end{cases}$$

La seule solution possible est la fonction :

$$(x, t) \mapsto \mu(x, t) = \mu_0(x - v(t - t_0)), \tag{1.6}$$

qui correspond à une propagation selon les x positifs (voir figure 1.1).

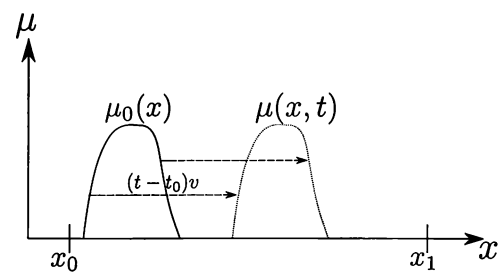


Figure 1.1 - Transport d'une répartition initiale

Remarque 1.2

La fonction initiale choisie dans la figure 1.1 n'est pas de classe C^1 (il y a des ruptures de pente), et donc la solution μ ne l'est pas, ce qui pose problème au sens classique puisque l'équation aux dérivées partielles suppose de pouvoir dériver.

Plus précisément, on voit que l'expression de la solution (1.6) ne requiert *a priori* aucune régularité sur μ_0, et que cette solution est par ailleurs tout à fait satisfaisante d'un point de vue physique. C'est, typiquement, ce que l'on appelle une *solution faible* du problème.

Étudions maintenant l'équation non homogène obtenue en ajoutant un *terme source* f dans le problème à condition initiale, en ne supposant pas v constante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial t} + v\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = f(x,t) \\ \mu(x,t_0) = \mu_0(x) \end{cases} \tag{1.7}$$

Cherchons s'il est possible de caractériser la courbe représentative C_X d'une fonction $t \mapsto X(t)$, vérifiant $X(0) = X_0$, et telle que ce problème se ramène à une *équation différentielle ordinaire* (*EDO*). À cet effet, posons :

$$\hat{\mu}(t) = \mu(X(t), t)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial x}(X(t),t)\frac{dX}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial t}(X(t),t)$$

Ainsi, si $\dfrac{dX}{dt} = v$, alors :

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = f(X(t),t)$$

Autrement dit, on s'est ramené au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = v(X(t),t) & \text{avec } X(0) = X_0 \\ \dfrac{d\hat{\mu}}{dt} = f(X(t),t) & \text{avec } \hat{\mu}(0) = \hat{\mu}_0(X_0,t_0) \end{cases} \tag{1.8}$$

Dans ce cas précis, il est possible de déterminer X puis d'en déduire $\hat{\mu}$.

La courbe C_X est appelée *courbe caractéristique de l'équation aux dérivées partielles*. Elle permet de ramener celle-ci à système différentiel dépendant de moins de variables (ici, on passe d'une équation aux dérivées partielles en (x,t) à une équation différentielle ordinaire en t).

On dit que la solution « se propage selon la caractéristique ».

Ce rôle particulier des courbes (et dans le cas général des surfaces) caractéristiques conduit à la « méthode des caractéristiques » pour résoudre les équations aux dérivées partielles (essentiellement du premier ordre).

Si, au lieu de se donner une condition initiale $\mu(x,t_0) = \mu_0(x)$, on s'était donné une condition selon la courbe caractéristique :

$$\mu(x_0 + v(t - t_0), t) \tag{1.9}$$

on se serait trouvé face à un problème de la forme :

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = f(x_0 + v(t-t_0),t) \text{ et } \hat{\mu}(t) = \mu(x_0 + v(t-t_0),t) = \mu_c(t) \tag{1.10}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Ainsi, si $\frac{d\mu_c}{dt} = f(x_0 + v(t - t_0), t)$, on obtient une infinité de solutions, mais dans le cas contraire, il n'y a aucune solution.

Les courbes caractéristiques jouent donc également un rôle dans la définition de problèmes à valeur « initiale » bien posés. Cette propriété est exploitée dans la classification des équations du second ordre.

1.2.2 Équation de la chaleur

Désignons par $\vec{q}$ et T les fonctions « flux de chaleur » et « température », des variables spatiales (x, y), et du temps t.

D'après le premier principe de la thermodynamique, une équation d'état et la loi de Fourier, on a

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{q}) = -c\,\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ \vec{q} = -k\,\overrightarrow{\operatorname{grad} T} \end{cases}$$

où $c > 0$ désigne la chaleur spécifique, et $k > 0$ le coefficient de conductivité thermique. Pour ce qui suit, on pose $a = \frac{k}{c}$.

Par combinaison, on obtient :

$$-\frac{\partial T}{\partial t} + a\,\Delta T = 0 \tag{1.11}$$

L'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue est appelée *équation de la chaleur.* Elle gouverne tous les phénomènes diffusifs (c'est donc aussi l'équation de la diffusion).

Reprenons l'équation en une dimension d'espace :

$$-\frac{\partial T}{\partial t} + a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{1.12}$$

Réalisons une *étude par invariance d'échelle* :

si $(x, t) \mapsto T(x, t)$ est solution, alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $(x, t) \mapsto T(\lambda x, \lambda^2 t)$ est également solution. En particulier, si on choisit formellement $\lambda = \frac{x}{t}$, on voit que la solution ne dépend plus que de la variable $z = \frac{x^2}{t}$.

Ceci incite à chercher une solution sous la forme :

$$(x, t) \mapsto T(x, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right) = v(z)$$

Par dérivation composée, (1.12) implique :

$$0 = (2a + z)v'(z) + 4azv''(z) \tag{1.13}$$

ce qui conduit à :

$$v'(z) = v_1 \frac{e^{-\frac{z}{4a}}}{\sqrt{z}}$$

puis† :

$$T(x,t) = v_0 + v_1 \int_0^{\frac{x^2}{t}} \frac{e^{-\frac{z}{4a}}}{\sqrt{z}} dz = v_0 + v_1 \sqrt{4a\pi}\, \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right)$$

Les principales propriétés de l'équation de la chaleur peuvent être illustrées en considérant le problème posé sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ avec une condition de décroissance à l'infini pour la variable d'espace, en supposant, en outre, que la répartion de chaleur initiale prend la forme d'un créneau ($T(x,0) = 1$ sur $[-1, 1]$ et 0 ailleurs).

On peut vérifier que la solution (dont le tracé à différents instants est donné sur la figure 1.2) est donnée par :

$$T(x,t) = \mathrm{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)$$

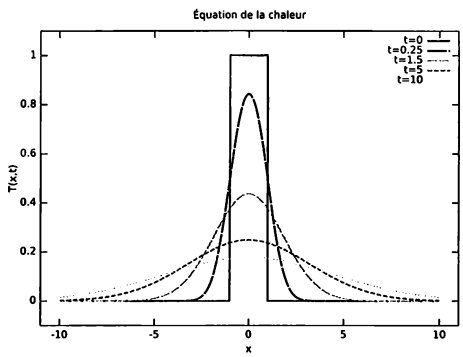


Figure 1.2 - Diffusion d'un créneau

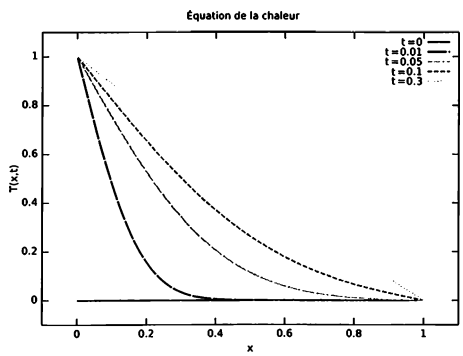


Figure 1.3 - Cloison thermostatée

La figure 1.2 met en évidence des propriétés de l'équation de la chaleur :

i. la *propagation à vitesse infinie* : dès que $t > 0$, la solution est non nulle en tout point de l'espace ;

ii. la *non-réversibilité* : si $\tilde{t} = -t$ et $\widetilde{T}(x,\tilde{t}) = T(x,t)$, l'équation devient

$$-\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \tilde{t}} + (-a)\frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial x^2} = 0$$

†. La fonction erf, ou *fonction d'erreur de Gauss*, est donnée par : $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ce qui revient à changer le signe d'une constante thermodynamique et donc à donner un système complètement différent (et physiquement inconsistant puisqu'il ne respecte plus le second principe) ;

iii. la *régularisation* de la solution au cours du temps ; physiquement, on retrouve bien le comportement de systèmes dont l'entropie croît ;

iv. l'*absence d'histoire* du système : la configuration à un instant ne dépend que de celle à l'instant précédent ;

v. les valeurs maximales de températures sont atteintes au début de l'expérience.

Considérons maintenant un problème plus réaliste : celui d'une cloison 1D initialement à température nulle :

$$T(x,0) = T_i(x) = 0, \qquad x \in [0,1]$$

La présence de bords implique de s'interroger sur les conditions à imposer. On donne la transcription physique des conditions aux limites les plus classiques :

i. *conditions limites de Dirichlet* : la température est imposée (le système est en contact avec un *thermostat*) :

$$T(x_0,t) = T_0(t) \qquad \text{donné}$$

ii. *conditions de Neumann* : le flux de chaleur ou, de manière équivalente, la dérivée normale de la température sont imposés :

$$(\vec{q}.\vec{n})(x_0,t) = -k\overrightarrow{\text{grad}}(T)(x_0,t).\vec{n} = -k\frac{\partial T}{\partial n}(x_0,t) = q_0(t) \qquad \text{donné}$$

iii. *conditions de Robin ou de Fourier* : un échange thermique par convection est imposé :

$$(\vec{q}.\vec{n})(x_0,t) = -\alpha(T(x_0,t) - T_0)$$

α est le coefficient de convection ou impédance thermique du milieu environnant, T_0 est sa température.

La figure 1.3 correspond à l'évolution d'une cloison soumise à deux thermostats à ses extrémités (température initiale homogène égale à la valeur du thermostat de droite). Les mêmes propriétés que pour l'exemple précédent sont mises en évidence (vitesse de propagation infinie, régularisation).

1.2.3 Équation des ondes

Considérons un fluide isotherme. La thermodynamique permet de lier les variations de volume (divergence de la vitesse) et de pression, la conservation de la quantité de mouvement relie variation de vitesse et gradient de pression :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{v}) = -\xi_s \dfrac{\partial p}{\partial t} \\ \rho \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p) \end{cases} \tag{1.14}$$

où ρ désigne la masse volumique, et ξ_s le coefficient de compressibilité isentropique.

Ce système de deux équations du premier ordre peut être étudié tel quel ou mis sous la forme d'une équation découplée du second ordre :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \tag{1.15}$$

où $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho \xi_s}}$ est la *célérité* ; l'équation est appelée *équation des ondes acoustiques.*

Il est intéressant de noter qu'en introduisant le changement de variable $u = x + ct$, $v = x - ct$, et qu'en posant $\tilde{p}(u, v) = p(x, t)$, l'équation vérifiée par la nouvelle fonction inconnue est :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial u \partial v} = 0$$

ce qui donne donc directement :

$$\begin{aligned} \tilde{p}(u, v) &= p_1(u) + p_2(v) \\ p(x, t) &= p_1(x + ct) + p_2(x - ct) \end{aligned}$$

On voit qu'à l'instar de l'équation de transport, on obtient une solution généralisée (il n'y a pas de régularité apparente).

Exploitons cette propriété pour illustrer l'équation, et considérons, à cet effet, le domaine $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

Si on connaît la configuration initiale p_0 et la vitesse initiale v_0, on a :

$$\begin{aligned} p_0(x) &= p(x, 0) = p_1(x) + p_2(x) \\ v_0(x) &= -\xi_s \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = -c\xi_s (p_1'(x) - p_2'(x)) \end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer p_1 et p_2 (voir la section 7.2).

La figure 1.4 illustre le cas où $v_0 = 0$ et où p_0 est une fonction créneau, prenant la valeur 1 sur $[-1, 1]$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On observe les propriétés suivantes :

i. deux ondes se propagent : l'*onde progressive* p_2 (vers les x positifs) et l'*onde rétrograde* p_1 (vers les x négatifs) ;

ii. la propagation se fait à *vitesse finie* (c) ;

iii. l'équation est réversible : si on considère un renversement temporel $\tilde{t} = -t$ et $\tilde{p}(x, \tilde{t}) = p(x, t)$, l'équation vérifiée par $\tilde{p}$ est la même que celle vérifiée par p.

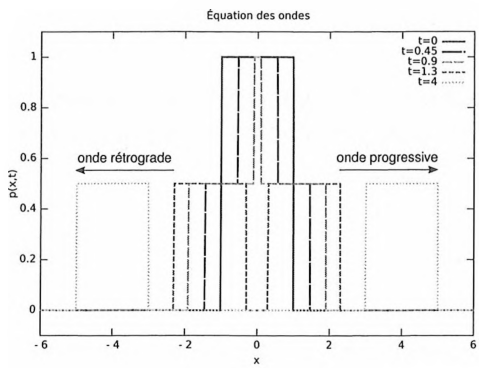


Figure 1.4 - Équation des ondes en milieu infini

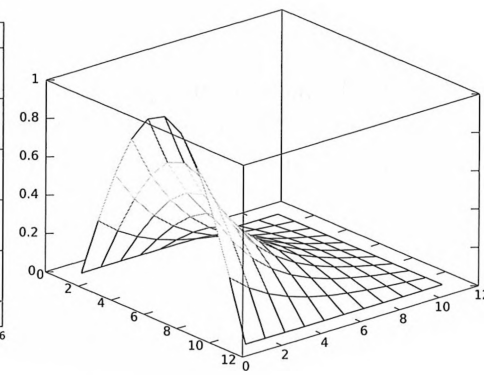


Figure 1.5 - Équation de Laplace

Si on considérait un domaine fini $[x_0, x_1]$, il serait nécessaire de donner des conditions aux limites. Physiquement, elles pourraient être :

i. des conditions de Dirichlet : pression imposée (par exemple extrémité d'un instrument à la pression atmosphérique)

$$p(x_0, t) = p_0(t) \qquad \text{donné}$$

ii. des conditions de Neumann : vitesse ou gradient normal de pression imposé (par exemple air en contact avec la membrane vibrante d'un tambour)

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x_0, t) = -\rho \frac{\partial \vec{v}.\vec{n}}{\partial t}(x_0, t) = -\rho \frac{\partial v_0}{\partial t}(t) \qquad \text{donné}$$

iii. des conditions de Fourier : impédance acoustique du milieu extérieur donnée (système en contact avec un milieu absorbant)

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x_0, t) = -\alpha(p(x_0, t) - p_0(t))$$

Des phénomènes classiques de réflexion ou d'absorption pourraient être observés au niveau des conditions aux limites.

Dans tous les cas, la donnée de la configuration et de la vitesse initiales seraient nécessaires (la présence d'une dérivée d'ordre deux en temps requiert la connaissance des dérivées d'ordre inférieur).

1.2.4 Problème stationnaire

Dans les deux cas précédents, si on atteint une *position stationnaire*, i.e., qui ne varie plus dans le temps, le problème se ramène à celui d'un Laplacien nul. Le Laplacien est omniprésent dans les problèmes à variables spatiales (qui *a priori* jouent toutes le même rôle, sauf dans certains cas précis, comme les tuyères 1D, cf. l'équation (3.7)).

Une interprétation physique qui peut justifier cette omniprésence du Laplacien est qu'il est, à l'ordre 0, proportionnel à l'écart à la moyenne sur un petit domaine autour du point étudié. Prenons comme exemple un cube de côté $2d$, de volume $\mathcal{V}$; un développement de Taylor à l'ordre deux au voisinage d'un point $M(x, y, z)$ conduit à :

$$\begin{aligned} f(x+dx, y+dy, z+dz) = f(x,y,z) &+ dx\frac{\partial f}{\partial x} + dy\frac{\partial f}{\partial y} + dz\frac{\partial f}{\partial z} \\ &+ dx^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + dy^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + dz^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &+ 2\,dx\,dy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\,dx\,dz\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2\,dy\,dz\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial yz} \\ &+ o\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi, en exploitant les parités, on obtient :

$$\frac{1}{\mathcal{V}} \iiint_{-d}^{+d} \left(f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z)\right) dv = \frac{\Delta f}{24} + o(1)$$

Le coefficient 1/24 vient naturellement de la forme du domaine considéré.

Une fonction dont le Laplacien est nul est dite *harmonique*.

Sur un domaine infini, les fonctions harmoniques sont des polynômes (non nécessairement de degré 1).

Considérons le cas du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ (figure 1.5), sur lequel on recherche la solution stationnaire de l'équation de la chaleur lorsque l'on impose une température nulle sur les côtés $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$, et, sur le côté $y = 0$ une température de la forme $x \mapsto T_0 \sin(\pi x)$ (ce choix paraîtra clair après avoir lu le chapitre 6).

On peut vérifier que la solution est donnée par :

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \frac{T_0}{\sinh(\pi)} \sin(\pi x) \sinh(\pi y)$$

Outre la grande régularité de la solution, la principale observation que l'on peut faire est que le maximum de la température est obtenu sur le bord du domaine.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

1.2.5 Le problème de Cauchy sur l'équation de Laplace, un exemple de problème mal posé

Soit le problème bidimensionnel suivant, posé sur le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \text{ pour } (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = u(x, 1) &= 0, \text{ pour } x \in [0, 1] \\ u(0, y) &= 0, \text{ pour } y \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= g(y), \text{ pour } y \in [0, 1] \end{aligned} \tag{1.16}$$

où g est une fonction donnée deux fois dérivable, nulle en 0 et 1.

Ce problème est ce que l'on appelle un problème inverse : il n'y a pas de condition limite sur le bord $x = 1$, et il y a deux conditions sur le bord $x = 0$ (sur u et sa dérivée normale). Ce type de problème se rencontre très fréquemment en pratique puisqu'il correspond aux techniques de contrôle non destructif : on peut imaginer que l'utilisateur souhaite connaître l'état du système sur le bord inatteignable $x = 1$, pour celà il impose une condition de Dirichlet nulle sur le bord $x = 0$ et mesure la réaction (de Neumann) g sur ce même bord.

On verra au chapitre 6, que ce problème se prête parfaitement à la séparation de variables. Il est naturel de développer la solution sur la base des fonctions :

$$Y_k : y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(k\pi y) \quad , \quad k \in \mathbb{N}^*$$

On obtient alors :

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(k\pi y) \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{A_k}{k\pi} \sinh(k\pi x) \right) \tag{1.17}$$

avec :

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sin(k\pi y)\, g(y)\, dy \tag{1.18}$$

Le théorème de Parseval (voir théorème 5.12, chapitre 5) conduit à :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} A_k^2 = \|g\|^2_{L^2([0,1])}$$

Si on s'intéresse au système sur le bord $x = 1$ en posant $U(y) = u(1, y)$, on voit que :

$$\|U\|^2_{L^2([0,1])} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{A_k \sinh(k\pi)}{k\pi} \right)^2 \tag{1.19}$$

et le terme de droite ne peut pas être un $O\left(\|g\|^2_{L^2([0,1])}\right)$, à cause du sinus hyperbolique qui peut être arbitraitement grand (on peut, par exemple, prendre le chargement unitaire $g = Y_n$ qui donne, à l'aide du symbole de Kronecker, $A_k = \delta^n_k$ et étudier U pour n grand). Cette impossibilité de majorer une norme de la quantité cherchée (U) par une norme quantité connue (g) implique qu'une petite variation (typiquement due à l'imprécision de la mesure) peut se répercuter en de grandes variations sur la quantité d'intérêt. Bien qu'il possède une unique solution, le problème est mal posé au sens de Hadamard.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

2 ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

Il est recommandé de donner un rapide coup d'oeil aux rappels de l'annexe A.

2.1 PRÉAMBULE : ÉTUDE D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL DE LA FORME $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

On se place, dans ce qui suit, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé direct.

$\mathbf{M} = (x, y, z)$ désigne un point de l'espace ; on notera indifféremment $f(\mathbf{M})$ ou $f(x, y, z)$ la valeur d'une fonction f au point $\mathbf{M}$.

Soient P, Q, R trois fonctions, supposées de classe C^1, des variables x, y, z.

On s'intéresse à la résolution du système différentiel :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (\mathcal{S})$$

On remarque que le système $(\mathcal{S})$ se met également sous la forme

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.1)$$

ce qui, physiquement, s'interprète comme le fait d'imposer en chaque point que le déplacement infinitésimal soit parallèle à un vecteur donné.

Définition 2.1

On appelle ***solution*** du système $(\mathcal{S})$ une courbe (C), dont la tangente en tout point M de coordonnées (x, y, z) en lequel P, Q et R ne s'annulent pas simultanément, est dirigée par le vecteur de coordonnées $(P(\mathrm{M}), Q(\mathrm{M}), R(\mathrm{M}))$.

Rechercher une solution du système $(\mathcal{S})$ revient donc à trouver une représentation paramétrique $t \mapsto \mathbf{M}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de la courbe C, telle que en tout point de paramètre t :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = k(t) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}_{\mathbf{M}(t)} \qquad (2.2)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ce qui traduit bien la colinéarité du vecteur tangent à (C) au point $\mathbf{M}(t)$ et du vecteur de composantes $(P, Q, R)_{\mathbf{M}(t)}$.

Si P, Q, et R ne s'annulent pas en $\mathbf{M}(t)$, alors :

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{P(\mathbf{M}(t))} = \frac{\frac{dy}{dt}}{Q(\mathbf{M}(t))} = \frac{\frac{dz}{dt}}{R(\mathbf{M}(t))}$$

Si P (respectivement Q, R) s'annule en $\mathbf{M}(t)$, alors, il en est de même pour $\frac{dx}{dt}$ (respectivement $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$).

On supposera donc, dans ce qui suit, P, Q, R non simultanément nuls.

Quand elle est possible, la résolution directe du système (2.2) donne une représentation paramétrique d'une courbe solution de $(\mathcal{S})$. Puisque le problème est posé dans $\mathbb{R}^3$, une technique alternative pour caractériser une courbe est de la définir comme l'intersection de deux surfaces, ce qui est l'objet de la section suivante.

2.1.1 Intégrales premières

Définition 2.2

On appelle ***intégrale première*** du système $(\mathcal{S})$ une fonction f de classe C^1 des trois variables x, y, z, non constante, et telle que, pour toute solution $C : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ de $(\mathcal{S})$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ soit constante.

Remarque 2.1

Dans cette définition, on voit directement que si $\mathbf{M}_0$ est un point de la courbe solution C, alors celle-ci est tracée sur la surface $\Sigma_{f,\mathbf{M}_0}$ décrite implicitement par

$$\Sigma_{f,\mathbf{M}_0} = \left\{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 / f(\mathbf{M}) = f(\mathbf{M}_0)\right\} \tag{2.3}$$

Théorème 2.1. *Une fonction f de classe C^1 des trois variables x, y, z, est une intégrale première de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, dans tout domaine où les solutions de $(\mathcal{S})$ sont définies, elle vérifie :*

$$P(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + Q(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + R(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

Démonstration. Soit $t \mapsto \mathbf{M}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une solution de $(\mathcal{S})$, et f une intégrale première.

Par dérivation composée (A.14) :

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{M}(t)) = \frac{dx}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{M}(t)) + \frac{dy}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{M}(t)) + \frac{dz}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{M}(t)) \tag{2.4}$$

On conclut en utilisant le fait que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ sont respectivement proportionnels à P, Q, R, et que la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ étant constante, le membre de gauche est nul. ■

Géométriquement, l'équation $(\mathcal{E})$ correspond à l'orthogonalité du gradient de la fonction décrivant la surface $\Sigma_{f,\mathbf{M}_0}$ et du vecteur tangent à la courbe C en $\mathbf{M}_0$. En effet, le gradient est normal au plan tangent à la surface (A.16). C est tracée sur $\Sigma_{f,\mathbf{M}_0}$, son vecteur tangent appartient donc au plan tangent à la surface.

D'autre part, si f_1 et f_2 sont deux intégrales premières de $(\mathcal{S})$, et si $\mathbf{M}_0$ est un point de la courbe solution C, alors les surfaces

$$\Sigma_{f_1,\mathbf{M}_0} : f_1(\mathbf{M}) = f_1(\mathbf{M}_0)$$
$$\Sigma_{f_2,\mathbf{M}_0} : f_2(\mathbf{M}) = f_2(\mathbf{M}_0)$$

contiennent toutes les deux C.

Il est intéressant de déterminer si $\Sigma_{f_1,\mathbf{M}_0} \cap \Sigma_{f_2,\mathbf{M}_0}$ permet de définir C et si d'autres intégrales premières contenant C peuvent être définies. C'est l'objet de la section suivante.

2.1.2 Intégrales premières indépendantes

Définition 2.3

Trois fonctions f, g, h, de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, sont dites ***fonctionnellement indépendantes*** si les seules fonctions différentiables H telles que la fonction $(x, y, z) \mapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ soit constante, sont les fonctions constantes.

Théorème 2.2. *Soient f, g, h trois fonctions de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$. Si le jacobien*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)}$$

ne s'annule pas dans Ω, alors, f, g, h sont fonctionnellement indépendantes.

Démonstration. La fonction $(x, y, z) \mapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ de la définition ci-dessus est constante si et seulement si sa différentielle est nulle.

Les résultats (A.6) et (A.8)) de l'annexe A conduisent à :

$$0 = dH = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial f} & \frac{\partial H}{\partial g} & \frac{\partial H}{\partial h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \qquad \forall (dx, dy, dz)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Si le déterminant de la matrice centrale est non nul, le système admet seulement la solution triviale $\left(\frac{\partial H}{\partial f}\ \frac{\partial H}{\partial g}\ \frac{\partial H}{\partial h}\right) = 0$ correspondant à une fonction H constante. ■

Théorème 2.3. *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$. Si la matrice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

est de rang 2, alors, f et g sont fonctionnellement indépendantes.

Démonstration. En considérant une fonction $(x, y, z) \mapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z))$, on obtient :

$$0 = dH = \left(\frac{\partial H}{\partial f}\ \frac{\partial H}{\partial g}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \qquad \forall (dx, dy, dz)$$

Si la matrice centrale est de rang 2, seule la solution triviale $\left(\frac{\partial H}{\partial f}\ \frac{\partial H}{\partial g}\right) = 0$ est possible. ■

Théorème 2.4. *Soient f et g deux intégrales premières indépendantes du système différentiel*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Q} \qquad (\mathcal{S})$$

Toute intégrale première de ce système s'exprime alors en fonction de f et g.

Démonstration. Soient f, g et h trois intégrales premières du système différentiel $(\mathcal{S})$ avec f et g indépendantes.
D'après le théorème 2.1 :

$$\begin{cases} P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \\ P\frac{\partial h}{\partial x} + Q\frac{\partial h}{\partial y} + R\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0$$

Comme P, Q et R ne sont pas simultanément nuls, la matrice du système ne peut pas être de rang 3 (sinon la seule solution serait la solution triviale).

D'après le théorème 2.2, les trois fonctions ne sont pas indépendantes. Il existe donc une fonction H non constante telle que :

$$H(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)) = 0$$

ce qui conduit à :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial f} \quad \frac{\partial H}{\partial g} \quad \frac{\partial H}{\partial h}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = 0$$

f et g étant indépendantes, d'après le théorème 2.3 les deux premières lignes sont indépendantes, et donc $\dfrac{\partial H}{\partial h}$ ne peut donc être nul sans que $\dfrac{\partial H}{\partial f}$ et $\dfrac{\partial H}{\partial g}$ le soient, ce qui est impossible (H non constante).

Finalement, $\dfrac{\partial H}{\partial h} \neq 0$; le théorème des fonctions implicites (A.10) permet alors d'exprimer h en fonction de f et g. ■

On arrive donc au résultat suivant :

Théorème 2.5. *Soient f et g deux intégrales premières indépendantes du système différentiel*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (\mathcal{S})$$

Alors, pour tout couple de réels (a,b), les courbes C_{ab}, intersection des surfaces $f(x,y,z) = a$ et $g(x,y,z) = b$, sont les solutions de $(\mathcal{S})$.

Proposition 2.6. *On dispose également d'un mécanisme simple pour construire une nouvelle intégrale première contenant C_{ab}.*

En effet, si $\mathcal{F}$ est une fonction telle que $\mathcal{F}(a) = b$, alors la courbe C_{ab} appartient également à la surface d'équation $h(x,y,z) = 0$, avec :

$$h(x,y,z) = \mathcal{F}(f(x,y,z)) - g(x,y,z) \qquad (2.5)$$

2.1.3 Méthode de résolution

Pour résoudre le système $(\mathcal{S})$, il faut donc déterminer deux intégrales premières indépendantes.

Toute intégrale première f du système différentiel $(\mathcal{S})$ doit satisfaire $(\mathcal{E})$. Par suite :

$$\begin{cases} df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz \\ P(x,y,z)\dfrac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y,z)\dfrac{\partial f}{\partial y} + R(x,y,z)\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad (2.6)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

En posant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = A(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = B(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = C(x,y,z) \end{cases} \tag{2.7}$$

on aboutit au résultat suivant :

Proposition 2.7. *Pour obtenir une intégrale première f du système différentiel*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{$\mathcal{S}$}$$

il suffit de déterminer trois fonctions A, B, C telles que :

$$\begin{cases} df = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz \\ 0 = A(x,y,z)\,P(x,y,z) + B(x,y,z)\,Q(x,y,z) + C(x,y,z)\,R(x,y,z) \end{cases} \tag{2.8}$$

Remarque 2.2

Une relation de la forme :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

peut aussi s'interpréter en terme de proportionnalité :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$$

Par suite, pour tout couple de réels (a, b) vérifiant $a\beta + b\delta \neq 0$:

$$\frac{a\alpha + b\gamma}{a\beta + b\delta} = \frac{a\lambda\beta + b\lambda\delta}{a\beta + b\delta} = \lambda = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

La recherche d'intégrales premières peut donc être facilitée grâce à la relation suivante :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{A\,dx + B\,dy}{AP + BQ} \text{ si } (AP + BQ) \neq 0 \tag{2.9}$$

Exemple 2.1

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

On recherche donc trois fonctions A, B, C telles que :

$$\begin{cases} df = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz \\ 0 = A(x,y,z)\,x(y-z) + B(x,y,z)\,y(z-x) + C(x,y,z)\,z(x-y) \end{cases}$$

Comme

$$P + Q + R = 0$$

alors :

$$A = B = C = 1$$

convient, ce qui conduit à une première intégrale première :

$$df_1 = dx + dy + dz \qquad \Rightarrow f_1 : (x, y, z) \mapsto x + y + z + \text{Constante}$$

On a aussi :

$$yz\,P + xz\,Q + xy\,R = 0$$

Par suite :

$$A(x, y, z) = yz \quad , \quad B(x, y, z) = xz \quad , \quad C(x, y, z) = xy$$

convient, ce qui conduit à une deuxième intégrale première :

$$df_2 = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz \qquad \Rightarrow f_2 : (x, y, z) \mapsto xyz + \text{Constante}$$

Les fonctions $(x, y, z) \mapsto x + y + z$ et $(x, y, z) \mapsto xyz$ étant indépendantes, les solutions du système considéré sont donc les intersections des surfaces $x + y + z = a$ et $xyz = b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (voir la figure 2.1).

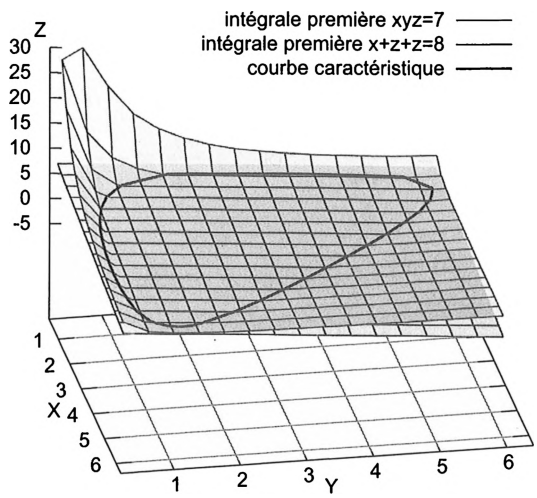


Figure 2.1 - Intégrales premières indépendantes et courbe caractéristique sur le cadran $x, y, z > 0$ pour l'exemple 2.1

2.2 Équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre

On s'intéresse maintenant à la résolution d'une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre :

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Définition 2.4

u, v, w étant trois fonctions, supposées de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on appelle ***équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre***, d'inconnue f, une équation de la forme :

$$u(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x} + v(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y} = w(x, y, f(x, y)) \qquad (\mathcal{E})$$

2.2.1 Recherche de solutions

Une solution f de $(\mathcal{E})$ peut être vue comme une fonction associant à un point (x, y) du plan une altitude $z = f(x, y)$, et être interprétée comme une surface de $\mathbb{R}^3$.

On choisit alors de rechercher les solutions de $(\mathcal{E})$ sous forme implicite, i.e. des fonctions φ définissant implicitement f comme solution de $(\mathcal{E})$:

$$\varphi(x, y, z) = \text{Constante} \Leftrightarrow z = f(x, y)$$

D'après le théorème des fonctions implicites (A.10), en tout point où $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}} \qquad (2.10)$$

f est alors solution de $(\mathcal{E})$ si :

$$u(x, y, f(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v(x, y, f(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w(x, y, f(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad (2.11)$$

φ est donc une intégrale première du système

$$\frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)} \qquad (\mathcal{S})$$

Le système $(\mathcal{S})$ est appelé ***système caractéristique*** de $(\mathcal{E})$.

Ceci nous amène donc au théorème suivant :

Théorème 2.8. *Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les intégrales premières du système caractéristique $(\mathcal{S})$.*

Si φ et ϕ sont deux intégrales premières indépendantes et F une fonction de deux variables non constante, alors les solutions s'écrivent sous forme implicite :

$$F(\phi(x, y, f(x, y)), \varphi(x, y, f(x, y))) = \text{Constante} \qquad (2.12)$$

Exemple 2.2

Soit à résoudre :

$$x(y-f)\frac{\partial f}{\partial x} + y(f-x)\frac{\partial f}{\partial y} = (x-y)f$$

Le système caractéristique est

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

on reconnaît l'exemple 2.1.

Les intégrales premières sont données par :

$$(x, y, z) \mapsto \phi(x, y, z) = x + y + z$$

et

$$(x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z) = xyz$$

Les fonctions de la forme $(x, y, z) \mapsto \psi(x, y, z) = F(\phi(x, y, z), \varphi(x, y, z))$ décrivent l'ensemble des intégrales premières.

On peut donc donner les solutions f sous forme implicite :

$$(x, y) \mapsto F(x + y + f(x, y), xyf(x, y)) = \text{Constante}$$

Exemple 2.3

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (\mathcal{E}_1)$$

Le système caractéristique de $(\mathcal{E}_1)$ est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x} \\ 0 = dz \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_1)$$

On voit directement que $(x, y, z) \mapsto \phi(x, y, z) = z$ est une intégrale première.

Par ailleurs :

$$0 = x\,dx + y\,dy = d(x^2 + y^2)$$

Autrement dit, $(x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2$ est également une intégrale première.

Toutes les solutions sont donc définies implicitement sous la forme

$$(x, y) \mapsto F(x^2 + y^2, f(x, y)) = \text{Constante}$$

ce qui conduit à :

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2)$$

Les solutions sont les surfaces de révolution d'axe $(O; \vec{z})$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

2.2.2 Courbes caractéristiques

Définition 2.5

u, v, w étant trois fonctions, supposées de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on appelle ***courbes caractéristiques*** de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$u(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x} + v(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y} = w(x, y, f(x, y)) \qquad (\mathcal{E})$$

les solutions de son système caractéristique

$$\frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)} \qquad (\mathcal{S})$$

Théorème 2.9. *D'après la proposition 2.6, une infinité de surfaces solutions passe par chaque courbe caractéristique.*

Définition 2.6

Avec les hypothèses et notations de la définition précédente, une courbe $\mathcal{N}_C$ est dite ***caractéristique en aucun point***, s'il n'existe aucun point $\mathbf{M}$ de $\mathcal{N}_C$ où le vecteur tangent soit colinéaire au vecteur de composantes $(u(\mathbf{M}), v(\mathbf{M}), w(\mathbf{M}))$.

Définition 2.7

On appelle ***pied de la caractéristique*** *passant par le point de coordonnées* (x, y) le point d'intersection de la caractéristique et de la ligne sur laquelle les conditions initiales sont données (en général l'axe des abscisses).

2.2.3 Problème de Cauchy

Définition 2.8

u, v, w étant trois fonctions, supposées analytiques dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, f_0 une fonction également analytique définie sur une courbe *régulière* $\mathcal{N}_0$ donnée sous forme paramétrique $t \mapsto (x_0(t), y_0(t))$, on appelle ***problème de Cauchy*** le système suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, f(x, y))\dfrac{\partial f}{\partial x} + v(x, y, f(x, y))\dfrac{\partial f}{\partial y} = w(x, y, f(x, y)) \\ f(x_0(t), y_0(t)) = f_0(t) \text{ sur } \mathcal{N}_0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles assortie d'une condition aux limites donnée sur une courbe.

Il s'agit ici de généraliser aux équations aux dérivées partielles du premier ordre les résultats existants pour le problème de Cauchy relatif à une équation différentielle : si l'on dispose d'une fonction f_0 donnée le long d'une courbe paramétrée, peut-on obtenir la solution au voisinage de celle-ci ? Et, si oui, peut-on ainsi, de proche en proche, obtenir la solution dans un domaine plus grand ?

Les hypothèses d'analycité conduisent à chercher la solution sous la forme d'un développement en série autour de la courbe $\mathcal{N}_0$ où f est connue. Une condition nécessaire pour obtenir une telle forme de solution est de pouvoir faire un développement limité à l'ordre 1 :

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f_0(x_0, y_0) + dx \frac{\partial f_0}{\partial x}(x_0, y_0) + dy \frac{\partial f_0}{\partial y}(x_0, y_0) + o\left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right)$$

ce qui suppose donc que l'on connaisse les dérivées partielles d'ordre 1. Cette condition va faire apparaître des contraintes sur la courbe $\mathcal{N}_0$.

La courbe $\mathcal{N}_0$ étant régulière, on peut définir une tangente en tout point, et donc supposer que f_0 est donnée en fonction de l'abscisse curviligne s (qui rend le vecteur tangent $\vec{t}(s)$ unitaire).

On suppose que, en tout point de $\mathcal{N}_0$, la valeur de f est donnée :

$$f(x_0(s), y_0(s)) = f_0(s)$$

Cette donnée permet d'obtenir également la valeur de la dérivée tangentielle de f :

$$\frac{df_0}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x_0}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y_0}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}(\mathbf{M}_0(s))\vec{t}(s) \tag{2.14}$$

La condition aux limites donne donc une première équation linéaire sur les dérivées partielles du premier ordre.

Il reste à déterminer si l'équation aux dérivées partielles écrite sur $\mathcal{N}_0$ permet d'obtenir une deuxième équation indépendante.

Comme, par hypothèse :

$$u(x_0, y_0, f(x_0, y_0))\frac{\partial f}{\partial x} + v(x_0, y_0, f(x_0, y_0))\frac{\partial f}{\partial y} = w(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

on a donc le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} u(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) & v(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial s} & \dfrac{\partial y_0}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \\ \dfrac{df_0}{ds} \end{pmatrix}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Sous réserve que le déterminant de ce système ne s'annule pas, i.e.

$$\begin{vmatrix} u(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) & v(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial s} & \dfrac{\partial y_0}{\partial s} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.15}$$

on peut donc obtenir, le long de $\mathcal{N}_0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ce qui permet, grâce aux formules de Taylor à l'ordre 1, d'obtenir un développement limité de la solution f au voisinage de la courbe.

La condition à respecter est donc que le déterminant (2.15) ne s'annule pas sur $\mathcal{N}_0$, ce qui s'interprète en disant que $\mathcal{N}_0$ ne doit pas être la projection dans le plan (x, y) d'une courbe caractéristique.

Il se trouve que cette condition est suffisante pour construire une solution analytique autour de la courbe donnée : par un raisonnement analogue, on construit les dérivées partielles d'ordre supérieur, puis on arrive à montrer que le rayon de convergence de la série entière est strictement positif, d'où le théorème suivant (voir par exemple [5] pour une démonstration complète).

Théorème 2.10. ***Théorème de Cauchy-Kowalewski***

u, v, w étant trois fonctions analytiques dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on considère l'équation aux dérivées partielles :

$$u(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} + v(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} = w(x, y, f(x, y)) \tag{$\mathcal{E}$}$$

Alors, la donnée d'une condition initiale analytique sur une courbe régulière $\mathcal{N}_0$, qui n'est caractéristique en aucun point, définit une unique solution analytique de ($\mathcal{E}$), appelée solution du problème de Cauchy relatif à la courbe $\mathcal{N}_0$.

Remarque 2.3

Ce théorème donne un résultat *local* d'existence et d'unicité de la solution analytique autour de la courbe de condition initiale. Il ne donne pas *a priori* d'information sur la taille du domaine d'existence de la solution. De même des solutions non-analytiques sont susceptibles de coexister.

2.2.4 Méthode des caractéristiques

On vient de voir qu'un problème de Cauchy est bien posé si la condition limite n'est pas donnée le long d'une caractéristique. Cela est dû à une propriété importante des caractéristiques qui conduit à une méthode d'étude des équations aux dérivées partielles.

Considérons donc un problème de Cauchy bien posé, où la courbe de condition limite $\mathcal{N}_0$ n'est pas une caractéristique, et déterminons comment construire la courbe

caractéristique qui passe par le point (x_0, y_0) de $\mathcal{N}_0$ correspondant à l'abscisse curviligne s_0 (voir la figure 2.2).

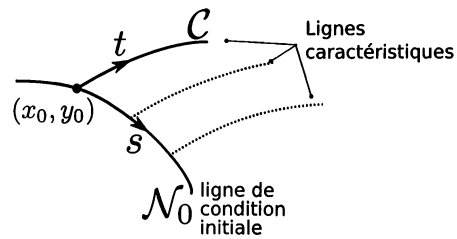


Figure 2.2 - Propagation de la donnée initiale le long de la caractéristique

Cette courbe caractéristique C, dont une représentation paramétrique est donnée par

$$t \mapsto (x_c(t), y_c(t), z_c(t))$$

est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_c}{dt} = u(x_c(t), y_c(t), z_c(t)) \\ \dfrac{dy_c}{dt} = v(x_c(t), y_c(t), z_c(t)) \\ \dfrac{dz_c}{dt} = w(x_c(t), y_c(t), z_c(t)) \end{cases} \tag{2.16}$$

avec :

$$x_c(0) = x_0,\ y_c(0) = y_0,\ z_c(0) = f_0(s_0) \tag{2.17}$$

On voit que la courbe caractéristique est solution d'un système d'équations différentielles ordinaires.

La courbe caractéristique étant tracée sur la surface solution, $z_c(t)$ est la valeur de la fonction cherchée au point $(x_c(t), y_c(t))$:

$$z_c(t) = f(x_c(t), y_c(t))$$

Il est donc « relativement simple » d'obtenir la solution de l'équation aux dérivées partielles le long d'une caractéristique.

Remarque 2.4

i. Comme annoncé par le théorème de Cauchy-Kowalewski, la solution obtenue par la méthode des caractéristiques est locale autour de la courbe de condition initiale, on est sûr de son existence que sur un intervalle $t \in [0, t_f[$ qui peut être très petit. En particulier, elle n'est plus valable dès que deux courbes caractéristiques se coupent, comme par exemple dans l'équation de Burgers présentée à la section 7.1.3.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ii. On comprend ici d'une autre manière pourquoi donner une condition limite le long d'une caractéristique ne permet pas de « propager » la solution hors de la caractéristique : cette dernière bénéficie en effet d'une forme « d'autonomie » (l'évolution le long de la caractéristique peut être calculée indépendamment du reste du domaine).

Exercices

2.1 Une équation du premier ordre

Résoudre l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dans $\mathbb{R}^2$:

$$f \frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{1 - f^2} \qquad (\mathcal{E}_1)$$

2.2 Un problème de Cauchy

Résoudre le problème de Cauchy pour $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y \dfrac{\partial f}{\partial x} - x \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f(s, 0) = \tilde{f}(s) \end{cases}$$

où $\tilde{f}$ est une fonction donnée.

Corrigés

2.1 i. $\sqrt{1-f^2}=0$ définit les deux solutions $f_1 : (x,y) \mapsto +1$ et $f_2 : (x,y) \mapsto -1$.

ii. Dans le domaine où $|f|<1$: le système caractéristique de $(\mathcal{E}_1)$ est donné par :

$$\begin{cases} dy = 0 \\ \dfrac{dx}{z} = \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_1)$$

La première ligne donne directement l'intégrale première ϕ_1 :

$$\phi_1 : (x,y,z) \mapsto y$$

Le seconde ligne permet de déduire l'intégrale première ϕ_2

$$dx = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz = -d(\sqrt{1-z^2})$$
$$0 = dx + d(\sqrt{1-z^2})$$

et donc, finalement :

$$\phi_2 : (x,y,z) \mapsto x + \sqrt{1-z^2}$$

Les deux fonctions étant indépendantes, toute solution est donc définie implicitement par :

$$F\left(y, x + \sqrt{1-f^2(x,y)}\right) = \text{Constante}$$

ce qui implique :

$$x + \sqrt{1-f^2(x,y)} = \psi(y)$$

ψ étant une fonction de classe C^1, le domaine d'existence de la solution est alors l'ensemble des (x,y) tels que $|x-\psi(y)|<1$.

Par suite :

$$f^2(x,y) = 1-(x-\psi(y))^2$$

ce qui correspond à un « tuyau » dont la section circulaire de rayon 1 reste orthogonale à la ligne des centres d'équation $y \mapsto (\psi(y), y, 0)$.

2.2 On reconnaît un problème de Cauchy pour lequel la condition limite est donnée sur l'axe des abscisses.

L'exemple 2.3 a mis en évidence le fait que les intégrales premières du système caractéristique sont les surfaces de révolution d'axe $(0;\vec{z})$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Il suffit donc de chercher parmi les intégrales premières du système caractéristique celles qui satisfont la condition limite. On peut donc conclure que la solution est la fonction :

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \tilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Une approche équivalente aurait consisté à exploiter la forme simple du problème caractéristique de la section 2.2.4. En effet, les premières équations conduisent à obtenir, pour les courbes caractéristiques, des cercles d'axe $(0, \vec{z})$; la dernière équation montre que la solution est constante le long d'une caractéristique (absence de second membre dans l'équation aux dérivées partielles).

La valeur de la solution sur une caractéristique est donc celle en son pied (c'est-à-dire sur l'axe des abscisses).

3 ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

Les équations aux dérivées partielles du second ordre sont très fréquentes en physique, leur étude est donc d'un grand intérêt pratique.

On considère ici le cas des équations semi-linéaires, qui permettent déjà d'étudier de très nombreux phénomènes en mécanique, électromagnétisme, ...

Un cadre plus général conduirait à de nombreuses difficultés techniques qui demanderaient de très amples développements, le lecteur intéressé pourra se reporter à [5, 10].

3.1 CLASSIFICATION DES ÉQUATIONS

Définition 3.1

a, b, c étant trois fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$, on appelle ***équation aux dérivées partielles semi-linéaire du second ordre***, d'inconnue f, une équation de la forme :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,b(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad (\mathcal{E})$$

Définition 3.2

Une équation telle que, dans un domaine Ω :

$$b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) > 0 \qquad (3.1)$$

est dite ***hyperbolique*** dans ce domaine.

Exemple 3.1

c étant un réel strictement positif, *l'équation des ondes* (que l'on a présenté en section 1.2.3 et que l'on étudiera plus précisément à la section 7.2).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.2)$$

est une *équation aux dérivées partielles hyperbolique.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Définition 3.3

Une équation telle que, dans un domaine Ω :

$$b^2(x, y) = a(x, y)\, c(x, y) \tag{3.3}$$

est dite ***parabolique*** dans ce domaine.

Exemple 3.2

α étant un réel strictement positif, *l'équation de diffusion* (que l'on a présenté en section 1.2.2 et que l'on étudiera plus précisément à la section 7.3)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{3.4}$$

est une *équation aux dérivées partielles parabolique.*

Définition 3.4

Une équation telle que, dans un domaine Ω :

$$b^2(x, y) < a(x, y)\, c(x, y) \tag{3.5}$$

est dite ***elliptique*** dans ce domaine.

Exemple 3.3

L'équation de Laplace (présentée en section 1.2.4, et qui sera étudiée plus longuement à la section 7.4)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{3.6}$$

est une *équation aux dérivées partielles elliptique.*

Exemple 3.4 Transition sub/super-sonique

Après de nombreuses simplifications, l'équation de la vitesse longitudinale v dans une tuyère 1D est donnée par :

$$(M(x) - 1)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{3.7}$$

où M est le nombre de Mach.

Dans le domaine des x tels que $M(x) < 1$, l'écoulement est subsonique et l'équation elliptique, mais dans le domaine des x tels que $M(x) > 1$, l'écoulement est supersonique et l'équation hyperbolique.

Les énormes changements physiques résultant de la transition sub/super-sonique se traduisent par un changement de nature de l'équation aux dérivées partielles.

Remarque 3.1

Lorsque a, b, c sont constants, la nature de $(\mathcal{E})$ est celle de la conique d'équation

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 = 0 \tag{3.8}$$

On verra que cette équation est la transformée de l'équation aux dérivées partielles dans le domaine de Fourier (chapitre 5).

3.2 Courbes caractéristiques et problème de Cauchy

Il s'agit ici encore, de généraliser aux équations aux dérivées partielles du second ordre les résultats existant pour le problème de Cauchy relatif à une équation différentielle : si l'on dispose d'une fonction f_0 donnée le long d'une courbe paramétrée régulière $\mathcal{N}_0 : s \mapsto (x_0(s), y_0(s))$, on cherche à quelle condition on peut obtenir une solution au voisinage de celle-ci.

Si on suppose toutes les données analytiques, l'idée consiste à chercher une solution analytique. Le développement de Taylor à l'ordre deux s'écrit :

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0) + dx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + dy \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) +$$
$$dx^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + dy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + 2\, dx\, dy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + o\left(dx^2 + dy^2\right) \tag{3.9}$$

La fonction f et ses dérivées partielles d'ordre un étant supposées données sur $\mathcal{N}_0$, une condition nécessaire pour propager la solution à proximité de la courbe est de pouvoir calculer les dérivées secondes.

3.2.1 Mise en évidence des courbes caractéristiques

On complète $(\mathcal{E})$ par la donnée de conditions initiales afin de définir un problème de Cauchy.

Définition 3.5

On appelle ***problème de Cauchy relativement à une courbe régulière*** $\mathcal{N}_0 : s \mapsto \mathbf{M}_0(s) = (x_0(s), y_0(s))$:

$$\begin{cases} a(x,y) \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b(x,y) \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c(x,y) \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = F\left(x, y, f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ f(x_0(s), y_0(s)) = f_0(s) \\ \dfrac{\partial f}{\partial n}(x_0(s), y_0(s)) = g_0(s) \end{cases} \tag{3.10}$$

où f_0 et g_0 sont deux fonctions données.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Montrons tout d'abord que la donnée de la fonction et de sa dérivée normale permet de connaître l'ensemble des dérivées partielles d'ordre 1.

L'idée fondamentale est que la donnée de f_0 détermine la valeur de la dérivée tangentielle et qu'à partir des dérivées tangentielle et normale, on peut déduire les dérivées partielles en x et y.

La courbe $\mathcal{N}_0$ étant régulière, on peut supposer que s est l'abscisse curviligne.

On a alors :

$$\begin{cases} \vec{t}(s) = \dfrac{d\mathbf{M}_0}{ds}(s) = \dfrac{dx_0}{ds}(s)\vec{x} + \dfrac{dy_0}{ds}(s)\vec{y} \quad \text{avec} \|\vec{t}(s)\| = 1 \\ \vec{n}(s) = \dfrac{dx_0}{ds}(s)\vec{y} - \dfrac{dy_0}{ds}(s)\vec{x} \end{cases} \tag{3.11}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \vec{x} = \dfrac{dx_0}{ds}(s)\vec{t}(s) - \dfrac{dy_0}{ds}(s)\vec{n}(s) \\ \vec{y} = \dfrac{dx_0}{ds}(s)\vec{n}(s) + \dfrac{dy_0}{ds}(s)\vec{t}(s) \end{cases} \tag{3.12}$$

Sachant que les fonctions suivantes sont connues :

$$f(\mathbf{M}_0(s)) = f_0(s) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}(\mathbf{M}_0(s))\vec{t}(s) = \frac{df_0}{ds}(s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}(\mathbf{M}_0(s)) = df_{\mathbf{M}_0(s)}(\vec{n}(s)) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}(\mathbf{M}_0(s))\vec{n}(s) = g_0(s)$$

on peut déduire les dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{M}_0(s)) &= df_{\mathbf{M}_0(s)}(\vec{x}) = \frac{dx_0}{ds}(s)\frac{df_0}{ds}(s) - \frac{dy_0}{ds}(s)g_0(s) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{M}_0(s)) &= df_{\mathbf{M}_0(s)}(\vec{y}) = \frac{dy_0}{ds}(s)\frac{df_0}{ds}(s) + \frac{dx_0}{ds}(s)g_0(s) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pour obtenir les dérivées secondes de f, on adjoint à $(\mathcal{E})$ les relations obtenues en dérivant les fonctions $s \mapsto G_x(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{M}_0(s))$ et $s \mapsto G_y(s) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{M}_0(s))$ (dont les valeurs sont donc connues).

On pose :

$$F_0(s) = F\left(x_0(s), y_0(s), f(x_0(s), y_0(s)), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(s), y_0(s)), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0(s), y_0(s))\right)$$

qui correspond donc à la valeur du second membre de l'équation aux dérivées partielles sur la courbe $\mathcal{N}_0$, qui est donc lui aussi connu :

$$\begin{cases} G'_x(s) = x'_0(s)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0(s), y_0(s)) + y'_0(s)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0(s), y_0(s)) \\ G'_y(s) = x'_0(s)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0(s), y_0(s)) + y'_0(s)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0(s), y_0(s)) \\ F_0(s) = a(x_0(s), y_0(s))\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,b(x_0(s), y_0(s))\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + c(x_0(s), y_0(s))\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases}$$

Le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} x'_0(s) & y'_0(s) & 0 \\ 0 & x'_0(s) & y'_0(s) \\ a(x_0(s), y_0(s)) & 2\,b(x_0(s), y_0(s)) & c(x_0(s), y_0(s)) \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

et vaut :

$$c(x_0(s), y_0(s))\left(x'_0(s)\right)^2 - 2\,b(x_0(s), y_0(s))\,x'_0(s)\,y'_0(s) + a(x_0(s), y_0(s))\left(y'_0(s)\right)^2$$

Si ce déterminant est nul, le système précédent a soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Si le déterminant est non nul, les dérivées secondes de f sont déterminées de manière unique sur $\mathcal{N}_0$. On retrouve la même condition si on cherche à calculer les dérivées d'ordre supérieur. On peut montrer que si toutes les fonctions données sont analytiques, alors il est possible de développer la fonction f en une série entière de rayon de convergence strictement positif, on est alors capable d'étendre localement la fonction sur un disque ouvert autour de chaque point de la courbe de condition initiale (théorème de Cauchy-Kowalewski).

Remarque 3.2

Si on avait choisi une autre paramétrisation de $\mathcal{N}_0$ que l'abscisse curviligne, on aurait conduit les mêmes calculs à une constante multiplicative non-nulle près (qui aurait correspondu à la norme des vecteurs tangent et normal). Le déterminant précédent aurait donc gardé la même signification.

Définition 3.6

On appelle ***courbes caractéristiques*** de $(\mathcal{E})$ les courbes *régulières* de $\mathbb{R}^2$, dont une représentation paramétrique est

$$x = x_c(t)\ ,\ \ y = y_c(t) \tag{3.15}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

et telles que :

$$(x_c'(t))^2\, c(x_c(t), y_c(t)) - 2\, x_c'(t) y_c'(t)\, b(x_c(t), y_c(t)) + (y_c'(t))^2\, a(x_c(t), y_c(t)) = 0 \quad (\mathcal{R})$$

Les courbes caractéristiques sont donc celles sur lesquelles il n'est pas possible de faire porter les conditions initiales d'un problème de Cauchy.

Définition 3.7

Une courbe $\mathcal{N}_0$ de $\mathbb{R}^2$, dont une représentation paramétrique est $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, n'est *caractéristique en aucun point* si, pour tout t de son domaine de définition :

$$\left(x_0'(t)\right)^2 c(x_0(t), y_0(t)) - 2\, x_0'(t) y_0'(t)\, b(x_0(t), y_0(t)) + \left(y_0'(t)\right)^2 a(x_0(t), y_0(t)) \neq 0$$

3.2.2 Calcul pratique

Théorème 3.1. *Si la fonction a n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de* $(\mathcal{E})$ *sont les solutions de l'équation*

$$a(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\, b(x, y) \frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0 \tag{3.16}$$

Théorème 3.2. *Si la fonction c n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de* $(\mathcal{E})$ *sont les solutions de l'équation*

$$c(x, y) \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2\, b(x, y) \frac{dx}{dy} + a(x, y) = 0 \tag{3.17}$$

Théorème 3.3. *Si les fonctions a et c sont identiquement nulles, les courbes caractéristiques de* $(\mathcal{E})$ *sont les droites* $x = \text{Constante}$, $y = \text{Constante}$.

Démonstration. Soit $C : x = x_c(t)$, $y = y_c(t)$ une courbe caractéristique de $(\mathcal{E})$.

On considère un paramètre t_0 tel que, au voisinage V_{t_0} de t_0 :

$$a(x_c(t), y_c(t)) \neq 0$$

Si x_c' s'annulait dans V_{t_0}, alors, d'après la définition 3.6 d'une courbe caractéristique, on devrait avoir $a(x_c(t_0), y_c(t_0))\,(y_c'(t_0))^2 = 0$ et donc $y_c'(t_0) = 0$, ce qui entre en contradiction avec la régularité de la courbe caractéristique.

Par suite, dans un domaine où a ne s'annule pas on a :

$$x_c'(t) \neq 0$$

La tangente à C n'est donc pas verticale : C peut être assimilée à la courbe représentative d'une fonction $y = g(x)$:

$$\begin{cases} x = x = x_c(t) \\ y = g(x) = y_c(t) \end{cases}$$

Par suite :

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y_c'(t)}{x_c'(t)} \tag{3.18}$$

En divisant la relation $(\mathcal{R})$ membre à membre par $(x_c'(t))^2$, on obtient :

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\,b(x,y)\,\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0 \tag{3.19}$$

On démontre de même les deux autres théorèmes. ■

On voit que la recherche de caractéristiques (dans les cas non triviaux, i.e. $a \neq 0$) se ramène à la résolution d'un problème du second ordre en $\frac{dy}{dx}$.

L'existence de solutions réelles dépend alors du signe du discriminant réduit $b^2 - ac$, qui caractérise la nature de l'équation aux dérivées partielles.

Ainsi, dans le cas hyperbolique, il existe deux caractéristiques réelles, dans le cas parabolique une caractéristique réelle et dans le cas elliptique deux caractéristiques complexes conjuguées :

$$\text{pour } a \neq 0, \quad \begin{cases} b^2 - ac > 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ b^2 - ac = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \\ b^2 - ac = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \pm i\dfrac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \end{cases} \tag{3.20}$$

Exemple 3.5

On considère l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C$$

où C est une constante réelle.

Cette équation est hyperbolique dans $\mathbb{R}^2$ tout entier.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Les courbes caractéristiques sont les solutions de :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = -1$$

Ce sont donc les droites

$$y = \pm x + \text{Constante}$$

Exemple 3.6

On considère l'équation :

$$y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C$$

où C est une constante réelle.

Pour cette équation :

$$b^2 - a\,c = x^2 y^2$$

Cette équation est donc hyperbolique en dehors des axes de coordonnées.

Les courbes caractéristiques sont les solutions de :

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ou encore :

$$x\,dx = \pm y\,dy$$

Ce sont donc les courbes

$$x^2 \pm y^2 = \text{Constante}$$

3.3 Réduction à la forme standard

3.3.1 Changement de variables

Proposition 3.4. *Le caractère hyperbolique, parabolique, ou elliptique d'une équation aux dérivées partielles du second ordre ne dépend pas du système de coordonnées choisi.*

Démonstration. On considère le changement de variables $(X(x, y), Y(x, y))$ supposé tel que le Jacobien J ne s'annule pas :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} \neq 0 \tag{3.21}$$

On pose $f(x, y) = \tilde{f}(X, Y)$, par dérivation composée, on obtient (voir A.1.2) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2}\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = {} & \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} \\ & + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\frac{\partial Y^2}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}a(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,b(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = {} & \\ A(x, y)\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + 2\,B(x, y)\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + C(x, y)\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} + \tilde{F}\left(X, Y, \tilde{f}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\right) &\end{aligned}$$

où on a posé :

$$\begin{aligned}\tilde{F}\left(X, Y, \tilde{f}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\right) = {} & 2b(x, y)\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\frac{\partial Y^2}{\partial x \partial y}\right) \\ & + a(x, y)\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) + c(x, y)\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

et :

$$A(x, y) = a(x, y)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2\,b(x, y)\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + c(x, y)\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2$$

$$B(x, y) = a(x, y)\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + b(x, y)\left\{\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\right\} + c(x, y)\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$C(x, y) = a(x, y)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + 2\,b(x, y)\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + c(x, y)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On obtient alors :

$$B^2(X,Y) - A(X,Y)\,C(X,Y) = J^2\left(b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y)\right)$$
$$\text{avec } J^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} \tag{3.22}$$

comme $J \neq 0$, on voit le signe de la quantité « $B^2 - AC$ » donnant le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique est indépendant du jeu de variables retenu. ■

On va maintenant voir que les courbes caractéristiques permettent de définir un changement de variable conduisant à une forme simple de l'équation aux dérivées partielles (forme dite *standard)* ou certains termes parmi A, B ou C ont été annulés.

3.3.2 Formes standard

Équations hyperboliques

Étant donnée une **équation hyperbolique** $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$, les caractéristiques sont les solutions de (3.20) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}$$

Après intégration, on obtient les courbes caractéristiques sous forme implicite :

$$\varphi_i(x,y) = C_i \ , \quad i = 1,2$$

où les $C_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Théorème 3.5. *Soient $\varphi_1(x,y) = C_1$ et $\varphi_2(x,y) = C_2$ les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation hyperbolique $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$.*

En posant :

$$\begin{cases} X = \varphi_1(x,y) \\ Y = \varphi_2(x,y) \end{cases} \qquad \text{et } f(x,y) = \tilde{f}(X,Y) \tag{3.23}$$

cette équation se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} = G\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}, \tilde{f}, X, Y\right) \tag{3.24}$$

En posant ensuite :

$$\begin{cases} \hat{X} = X + Y \\ \hat{Y} = X - Y \end{cases} \qquad \text{et } \tilde{f}(X,Y) = \hat{f}(\hat{X},\hat{Y}) \tag{3.25}$$

elle se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{X}^2} - \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{Y}^2} = H\left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}}, \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}, \hat{f}, \hat{X}, \hat{Y}\right) \tag{3.26}$$

Ce sont les ***deux formes standards d'une EDP hyperbolique.***

Démonstration. Si $a = c = 0$, on a déjà la première forme standard.
Si $a \neq 0$, alors, en injectant (3.16) dans (3.3.1), et en remarquant que :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}}$$

on voit que le choix $X = \varphi_1(x, y)$ conduit à annuler $A(X, Y)$.

Si besoin est, on peut également annuler C en posant $Y = \varphi_2(x, y)$ (si c est nul, on garde $Y = y$).

Pour la suite, par dérivation composée :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}}\frac{\partial \hat{X}}{\partial X} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}}\frac{\partial \hat{X}}{\partial Y} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}\frac{\partial \hat{Y}}{\partial Y} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}$$

Et, de même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\right] = \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}\right] \\ &= \frac{\partial \hat{X}}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \hat{X}}\left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}\right] + \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \hat{Y}}\left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \hat{X}}\left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}\right] + \frac{\partial}{\partial \hat{Y}}\left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{Y}}\right] = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{X}^2} - \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{Y}^2}\end{aligned}$$

■

Équations paraboliques

Étant donnée une **équation parabolique** $(\mathcal{E}_P)$, la caractéristique est la solution de (3.20) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

Après intégration, on obtient une courbe caractéristique sous forme implicite :

$$\varphi(x, y) = C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Théorème 3.6. *On pose :* $X = \varphi(x, y)$.

Si Y est une fonction indépendante de X, alors, en posant :

$$f(x, y) = \tilde{f}(X, Y) \tag{3.27}$$

$(\mathcal{E}_\mathcal{P})$ *peut s'écrire sous la forme :*

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} = G\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}, \tilde{f}, X, Y\right) \tag{3.28}$$

Démonstration. On suppose $a \neq 0$. Le changement de variable $X = \varphi_1(x, y)$ permet alors d'annuler A.

Sachant que $b^2 - ac = 0$ et $b^2 - ac = J^2(B^2 - AC)$, on voit que l'on a automatiquement $B = 0$ (pour Y choisi de manière à ce que le changement de variables soit régulier).

On se retrouve donc uniquement avec $C \neq 0$, ce qui correspond à la forme standard. ■

Équations elliptiques

Étant donnée une **équation elliptique** $(\mathcal{E}_\mathcal{E})$, les caractéristiques sont les solutions de (3.20) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\sqrt{\frac{ac - b^2}{a^2}}$$

soient $\varphi_1(x, y) =$ Constante, et $\varphi_2(x, y) =$ Constante, une forme implicite des courbes caractéristiques. φ_1 et φ_2 sont complexes conjuguées.

Théorème 3.7. *En posant :*

$$\begin{cases} X + iY = \varphi_1(x, y) \\ X - iY = \varphi_2(x, y) \end{cases} \text{ et } f(x, y) = \tilde{f}(X, Y) \tag{3.29}$$

$(\mathcal{E}_\mathcal{E})$ *s'écrit aussi :*

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} = G\left(f, X, Y, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\right) \tag{3.30}$$

Démonstration. L'équation des caractéristiques (3.16) devient, en injectant les formules de changement de variables (3.29) :

$$\begin{aligned} 0 &= a\left(\frac{\partial(X + iY)}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial(X + iY)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial(X + iY)}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial(X + iY)}{\partial y}\right)^2 \\ &= A - C + 2iB \end{aligned} \tag{3.31}$$

ce qui implique puisque A, B et C sont des fonctions réelles :

$$A = C \text{ et } B = 0 \tag{3.32}$$

■

Exemple 3.7

On considère l'équation suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$b^2 - ac = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$, l'équation est donc parabolique sur $\mathbb{R}^2$.
La courbe caractéristique est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \frac{y}{x} = \text{Constante}$$

On pose donc $f(x, y) = \tilde{f}(X, Y)$ avec :

$$\begin{cases} X = \dfrac{y}{x} \\ Y = y \end{cases} \quad \text{ou réciproquement} \quad \begin{cases} x = \dfrac{Y}{X} \\ y = Y \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} = -\dfrac{X^2}{Y} & \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{1}{x} = -\dfrac{X}{Y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial Y}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{X^2}{Y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{X}{Y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{X^2}{Y}\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{X^2}{Y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\right]$$

$$= \frac{X^4}{Y^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + \frac{2X^3}{Y^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$= \frac{X}{Y}\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{X}{Y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{X}{Y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\right]$$

$$= \frac{X^2}{Y^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + \frac{2X}{Y}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{X^2}{Y}\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{X}{Y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\right]$$

$$= -\frac{X^3}{Y^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} - \frac{X^2}{Y^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} - \frac{X^2}{Y}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Tout calcul fait, on obtient :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = Y^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2}$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} = 0 \qquad \text{donc} \begin{cases} \tilde{f}(X, Y) = A(X)\, Y + B(X) \\ f(x, y) = y\, A\left(\frac{y}{x}\right) + B\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

3.3.3 Équations linéaires à coefficients constants

Dans le cas de coefficients constants, il est possible d'aller plus loin dans la simplification de l'expression d'une équation aux dérivées partielles : à l'aide d'un changement de fonction inconnue, on peut éliminer les termes contenant des dérivées premières.

Théorème 3.8. *On considère l'équation linéaire à coefficients constants* $(\mathcal{E}_l)$ *:*

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + d \frac{\partial f}{\partial x} + e + g \frac{\partial f}{\partial y} + h f = 0 \tag{3.33}$$

Alors, il existe deux constantes réelles λ *et* μ *telles que, en posant :*

$$f(x, y) = \tilde{f}(X, Y) = \varphi(X, Y)\, e^{\lambda X + \mu Y} \tag{3.34}$$

i. si $(\mathcal{E}_l)$ *est* hyperbolique, $(\mathcal{E}_l)$ *devienne :*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} = C_h\, \varphi(X, Y) + \Phi_h(X, Y) \tag{3.35}$$

où Φ_h *est une fonction connue de* X *et* Y *;*

ii. si $(\mathcal{E}_l)$ *est* parabolique, $(\mathcal{E}_l)$ *devienne :*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = C_p\, \varphi(X, Y) + \Phi_p(X, Y) \tag{3.36}$$

où Φ_p *est une fonction connue de* X *et* Y *;*

iii. si $(\mathcal{E}_l)$ *est* elliptique, $(\mathcal{E}_l)$ *devienne :*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} = C_e\, \varphi(X, Y) + \Phi_e(X, Y) \tag{3.37}$$

où Φ_e *est une fonction connue de* X *et* Y*.*

Exemple 3.8

On considère l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x} + f = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

On identifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a(x,y) = 1 \\ b(x,y) = 0 \\ c(x,y) = -1 \end{cases} \Longrightarrow b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = 1 > 0$$

L'équation donnée est *hyperbolique.*

Les courbes caractéristiques sont données par :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x + \text{Constante}$$

On pose alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} X = x - y \\ Y = x + y \end{cases} \qquad \text{et } \tilde{f}(X,Y) = f(x,y)$$

Le Jacobien de cette transformation n'est pas identiquement nul.

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} - 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y}$$

En remplaçant dans $(\mathcal{E})$, on en déduit :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f = 2\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + 2\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} + 4\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + \tilde{f} = 0$$

ce qui conduit à la forme standard :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} + 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + \frac{\tilde{f}}{2} = 0$$

On pose alors :

$$\tilde{f}(X,Y) = \varphi(X,Y)\,e^{\lambda X + \mu Y}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

D'où :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} + \lambda \varphi\right) e^{\lambda X + \mu Y}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + \mu \varphi\right) e^{\lambda X + \mu Y}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + \lambda \mu \varphi\right) e^{\lambda X + \mu Y}$$

Par suite :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} + 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + \frac{\tilde{f}}{2} =$$

$$\left((1+2\mu)\frac{\partial \varphi}{\partial X} + (1+2\lambda)\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} + ((\lambda+\mu) + 2\lambda\mu + \frac{1}{2})\varphi\right) e^{\lambda X + \mu Y}$$

En choisissant :

$$\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$$

on élimine les dérivées premières :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} + 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} e^{\lambda X + \mu Y} = 0$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(X, Y) = u(X) + v(Y)$$

où u et v sont deux fonctions arbitraires, de classe C^2.
On a donc, finalement :

$$\tilde{f}(X, Y) = \varphi(X, Y)\, e^{\lambda X + \mu Y} = (u(X) + v(Y))\, e^{-\frac{X+Y}{2}}$$

$$f(x, y) = \tilde{f}(X, Y) = \tilde{f}(x - y, x + y) = (u(x - y) + v(x + y))\, e^{-x}$$

3.3.4 Équations de dimension supérieure

Dans le cas d'équations aux dérivées partielles impliquant 3 variables (mais toujours d'ordre 2), la démarche est similaire lorsque les termes d'ordre deux sont de la forme :

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2E\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + F\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

où (A, B, C, D, E, F) sont des fonctions de (x, y, z).

On étudie les valeurs propres de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

Dans un domaine où toutes les valeurs propres sont du même signe on parle de ***problème elliptique***.

Dans un domaine où une valeur propre est nulle et les autres de même signe, on parle de ***problème parabolique***.

Dans un domaine où au moins deux valeurs propres sont de signes opposés, on parle de ***problème hyperbolique***.

Exercices

3.1 Équation hyperbolique

Déterminer la solution générale de l'équation :

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x^3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

3.2 Équation des télégraphistes

Si on considère une ligne électrique, dont les propriétés linéïques sont : résistance R, inductance L, capacité C, conductivité G. Le voltage E à l'instant t au point d'abscisse x est solution de l'équation dite « des télégraphistes ».

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial E}{\partial t} + RGE \qquad (\mathcal{E}_T)$$

L'intérêt de cette équation est d'englober des équations plus spécifiques, puisque :

i. lorsque $L = G = 0$, $(\mathcal{E}_T)$ *devient :*

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = RC\frac{\partial E}{\partial t}$$

Ce type d'équation régit de nombreux problèmes de diffusion, et, en particulier, la diffusion de la chaleur : c'est **l'équation de la chaleur**.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ii. Lorsque $R = G = 0$ *(ce qui correspond à des courants à haute fréquence),* $(\mathcal{E}_T)$ *devient :*

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = LC\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Ce type d'équation régit la propagation des ondes : c'est **l'équation des ondes.**

On étudie le cas suivant : α, β, c étant des réels non nuls, réduire à la forme standard, puis proposer un changement de fonction inconnue pour l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\alpha\,\frac{\partial f}{\partial x} + \beta f = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

Corrigés

3.1 On pose :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a(x,y) = x \\ b(x,y) = 0 \\ c(x,y) = -x^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = x^4 \geqslant 0$$

L'équation donnée est ***hyperbolique en dehors de l'axe des ordonnées***.

Les courbes caractéristiques sont données par :

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^3 = 0$$

soit encore :

$$\frac{dy}{dx} = \pm x$$

Les caractéristiques sont donc les paraboles d'équation :

$$\frac{1}{2}x^2 \pm y = \text{Constante}$$

On pose alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} X = \dfrac{1}{2}x^2 - y \\ Y = \dfrac{1}{2}x^2 + y \end{cases} \quad \text{et } \tilde{f}(X,Y) = f(x,y)$$

Le Jacobien de cette transformation n'est pas identiquement nul.

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} = x\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + x\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} + x^2\left\{\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} - 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

En remplaçant dans $(\mathcal{E})$, on déduit :

$$x^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} = 4 x^3 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} = 0$$

ce qui conduit à la forme standard et à la solution :

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f}(X, Y) = g(X) + h(Y)$$

où g et h sont deux fonctions arbitraires.

On a donc, finalement :

$$f(x, y) = g\left(\frac{1}{2} x^2 - y\right) + h\left(\frac{1}{2} x^2 + y\right)$$

3.2 On pose :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a(x, y) = 1 \\ b(x, y) = 0 \\ c(x, y) = -c^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b^2(x, y) - a(x, y)\, c(x, y) = c^2 > 0$$

L'équation donnée est ***hyperbolique***.

Les courbes caractéristiques sont données par :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \pm c$$

Les caractéristiques sont donc les droites d'équation :

$$y = \pm c\, x + \text{Constante}$$

On pose alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} X = c\, x - y \\ Y = c\, x + y \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(X, Y) = f(x, y)$$

Le Jacobien de cette transformation n'est pas identiquement nul.

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} = c \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + c \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y}$$

En remplaçant dans $(\mathcal{E})$, on en déduit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta f = 2\alpha c \left\{ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right\} + 4c^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + \beta \tilde{f} = 0$$

ce qui conduit à la forme standard :

$$2\alpha c \left\{ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} \right\} + 4c^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + \beta \tilde{f} = 0$$

On pose alors :

$$\tilde{f}(X, Y) = \varphi(X, Y)\, e^{\lambda X + \mu Y}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} + \lambda \varphi \right) e^{\lambda X + \mu Y}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + \mu \varphi \right) e^{\lambda X + \mu Y}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + \lambda \mu \varphi \right) e^{\lambda X + \mu Y}$$

Par suite :

$$2\alpha c \left\{ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y} \right\} + 4c^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + \beta \tilde{f} =$$

$$\left\{ 2c \left((\alpha + 2\mu c) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + (\alpha + 2\lambda c) \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right) \right\} e^{\lambda X + \mu Y}$$

$$+ \left\{ 4c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} + (2\alpha(\lambda + \mu)c + 4\lambda \mu c^2 + \beta) \varphi \right\} e^{\lambda X + \mu Y}$$

En choisissant :

$$\lambda = \mu = -\frac{\alpha}{2c}$$

on obtient :

$$2\alpha c \left\{ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right\} + 4c^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial X \partial Y} + \beta \tilde{f} = \left\{ 2c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} + (\beta - \alpha^2) \varphi \right\} e^{\lambda X + \mu Y} = 0$$

ce qui conduit à :

$$2c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} + (\beta - \alpha^2) \varphi = 0$$

H. Poincaré a donné, en 1893, une solution de l'équation des télégraphistes, qu'il a obtenue à l'aide de la transformation de Fourier.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

DISTRIBUTIONS 4

Une lecture attentive de l'annexe C consacrée à l'intégration de Lebesgue est recommandée avant d'étudier ce chapitre. Le lecteur curieux pourra trouver des précisions dans des ouvrages de référence comme [6], et dans de nombreux traités relatifs aux équations aux dérivées partielles [9, 19], ou dans ceux relatifs à la théorie de la mesure et de l'intégration (souvent avec un point de vue légèrement différent) [16].

4.1 MOTIVATION

Les distributions jouent un rôle fondamental pour l'étude des équations aux dérivées partielles. Bien plus qu'un « outil commode » pour traiter les discontinuités, elles offrent un cadre nouveau d'interprétation des *EDP* et permettent de disposer de techniques d'analyse algébriques.

Ce chapitre a pour objectif de montrer que le cadre classique est parfois insuffisant pour le traitement de certains problèmes, et d'introduire la théorie des distributions.

Considérons l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

Dans le chapitre « Généralités », nous avons vu que les solutions sont de la forme :

$$(x, t) \mapsto f(x, t) = g(x - ct) + h(x + ct) \tag{4.2}$$

où les fonctions g et h sont à déterminer grâce aux conditions initiales.

A priori, la forme (4.2) ne requiert aucune régularité sur g et h ; ainsi, toujours dans le chapitre « Généralités », on a considéré la propagation d'un échelon, qui est une solution toute à fait satisfaisante d'un point de vue physique. Cependant, au sens classique, l'équation aux dérivées partielles (4.1) suggère une régularité C^2, propriété qui a été utilisée lors du changement de variables.

On voit donc que si l'on se restreint au sens classique, on écarte des problèmes irréguliers que l'on peut rencontrer en physique. L'objectif de la théorie des distributions est de pouvoir interpréter des équations comme (4.1) dans un sens plus général tel qu'une fonction de la forme (4.2) puisse être considérée comme solution (au sens faible ou au sens des distributions).

La théorie des distributions ne bouleverse heureusement pas tout ce qui fonctionne bien « classiquement ». Les distributions peuvent apparaître comme des « fonctions

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

généralisées ». Elles englobent la quasi-totalité des fonctions (presque toutes les fonctions peuvent s'interpréter comme des distributions), et la plupart des opérations définies sur les fonctions (addition, multiplication par un scalaire, multiplication par une fonction C^∞, dérivation, convolution) peuvent être également définies sur les distributions (et dans le cas où la distribution s'identifie à une fonction, on retrouve les résultats classiques).

La théorie des distributions repose sur l'évaluation de l'équation dans des champs « tests ». Pour cela, considérons une fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)^\dagger$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le problème des ondes (4.1) classique conduit à :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\right) d\lambda_x d\lambda_t = 0 \tag{4.3}$$

En utilisant la régularité de ϕ pour réaliser deux intégrations par parties, et en exploitant le fait que ϕ est nulle en dehors de son support (pour éliminer les termes de bord), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,t)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x,t)\right) d\lambda_x d\lambda_t = 0 \tag{4.4}$$

Après un changement de variables classique $u = x + ct$, $v = x - ct$, et le changement de fonction inconnue obtenu en posant $\tilde{f}(u,v) = f(x,t)$ et $\tilde{\phi}(u,v) = \phi(x,t)$, on en déduit :

$$4c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(u,v)\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial u \partial v} d\lambda_u d\lambda_v = 0 \tag{4.5}$$

Il apparaît que la fonction $(u,v) \mapsto \tilde{f}(u,v) = \tilde{f}_1(u) + \tilde{f}_2(v)$ est solution, puisque par exemple

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_2(v)\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial u \partial v} d\lambda_u = \tilde{f}_2(v)\left[\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial v}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

car les dérivées de ϕ sont également des fonctions à support compact et donc nulles pour $|u|$ suffisamment grand.

Par cette approche, on retrouve donc le résultat classique sans faire d'hypothèse de régularité sur f.

Il ne faudrait pas croire que les distributions sont simplement une manipulation sur les équations classiques (4.1) (on parle de *formulation forte*).

En effet, une expression comme (4.4) (dite *formulation faible*) peut très bien être le résultat de la modélisation physique d'un problème. Par exemple, en mécanique des milieux continus, le principe des puissances virtuelles pose comme axiome de base l'égalité de travaux (écrits sous forme d'intégrale et faisant intervenir une fonction

†. Fonction infiniment dérivable à support compact dans $\mathbb{R}^2$.

test du type de ϕ) alors qu'une autre axiomatique pose comme équation de base une équation aux dérivées partielles classique.

De manière évidente, les *solutions fortes* sont des *solutions faibles* ; les problèmes faibles sont donc plus généraux que les problèmes forts. Une démarche d'étude d'une équation aux dérivées partielles consiste à chercher les solutions faibles et à vérifier si elles sont également des solutions au sens fort (autrement dit si, en plus de résoudre le problème faible, elles ont suffisamment de régularité pour être dérivées).

La formulation faible offre un nouveau cadre d'interprétation des équations aux dérivées partielles particulièrement riche, dans la mesure où elle permet l'emploi d'outils algébriques (en plus des outils d'analyse classique) : dans l'expression $\int f\,\phi\,d\lambda$, au lieu d'étudier la fonction f, on peut aussi choisir d'étudier la forme linéaire T_f :

$$T_f : \phi \mapsto \int f\,\phi\,d\lambda \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

qui appartient au dual de C_c^∞, espace que l'on peut munir d'une topologie, et dans lequel on peut faire de l'approximation. On présente au chapitre 8, l'usage de sous-espaces de distributions particulièrement adaptés pour la recherche de solutions de certains problèmes aux frontières.

4.2 Espace des fonctions tests

Dans tout ce chapitre, on se place dans $\mathbb{R}^d$, ramené au système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on note $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$ la norme euclidienne du vecteur.

La topologie de l'espace des distributions est assez complexe, en particulier cet espace est non métrisable. L'exposé qui suit est simplifié et se base sur des caractérisations séquentielles qui, dans ce cas précis, définissent une topologie équivalente.

Notation

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $C_c^\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support† compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La notation $\mathcal{D}(\Omega)$ insiste sur l'utilisation de la notion de convergence donnée à la définition 4.1.

Proposition 4.1. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire.*

†. La notion de support est definie en C.8 page 227.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. La stabilité des fonctions infiniment dérivables par addition et multiplication par un scalaire est connue.

De plus :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{D}(\Omega)^2 \ , \ \text{supp}(f+g) \subset (\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g))$$

qui est compact. ■

Prouvons de plus que cet espace n'est pas réduit à la fonction nulle.

Soit $x_0 \in \Omega$ et $\bar{B}(x_0, r) \subset \Omega$ une boule contenue dans Ω ; on peut construire une fonction C^∞ à support égal à $\bar{B}(x_0, r)$:

$$\psi_{x_0,r}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{r^2}{r^2-|x-x_0|^2}} \text{ si } |x-x_0| < r \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{4.7}$$

À titre d'exemple, le tracé de telles fonctions dans les cas des dimensions 1 et 2 est donné sur les figures 4.1 et 4.2.

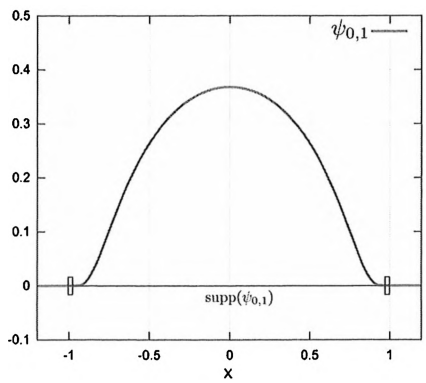


Figure 4.1 - $\psi_{0,1}$ sur $\mathbb{R}$

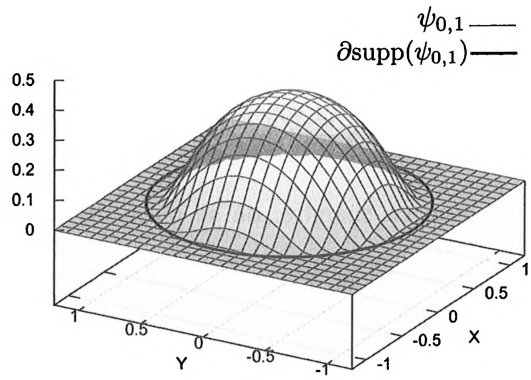


Figure 4.2 - $\psi_{0,1}$ sur $\mathbb{R}^2$

Notation

L'écriture des équations en dimension supérieure à 1 est grandement simplifiée par l'utilisation des multientiers pour transcrire les polynômes et les dérivations partielles. Un multientier est un élément de $\mathbb{N}^d$; pour tout ***multientier*** $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \Omega$ et tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on note :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \quad , \quad x^\alpha = \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i} \quad , \quad \partial^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\prod_{i=1}^{d} \partial x_i^{\alpha_i}}$$

On rappelle que par convention $\dfrac{\partial^0 \phi}{\partial x_i^0} = \phi$ et donc $\partial^0 \phi = \phi$.

Définition 4.1 Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

On dit qu'une suite $(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si il existe un compact K de Ω contenant tous les supports des ϕ_p (autrement dit $\forall p,\ \text{supp}(\phi_p) \subset K$), avec :

$$\forall\, \alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \ :\ \left\|\partial^\alpha \phi_p - \partial^\alpha \phi\right\|_{L^\infty} \underset{p\to+\infty}{\to} 0 \tag{4.8}$$

Il s'agit donc d'une convergence uniforme sur la fonction et toutes ses dérivées partielles, sous la condition d'un support commun. C'est une convergence très stricte.

Remarque 4.1

Pour le lecteur non familier de ces concepts, il faut noter que la notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas associée à une norme mais à une famille de semi-normes. La construction topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ est traitée dans de nombreux ouvrages comme [17, 18].

Il faut bien noter que les fonctions de $\mathcal{D}$ sont très pratiques à utiliser : en tant que fonctions continues sur des compacts, elles sont bornées et appartiennent donc à tous les espaces L^p pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Par ailleurs, bien que $\mathcal{D}$ puisse sembler un « petit » espace, des résultats de densité montrent combien il est utile.

Reprenons la fonction $\psi_{0,1} \in \mathcal{D}$ définie à l'équation (4.7), et posons $\phi = \dfrac{\psi_{0,1}(x)}{\int_\Omega \psi_{0,1} d\lambda}$, qui est donc normalisée au sens de $L^1(\Omega)$.

On construit la famille de fonctions :

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\ ,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{+\star} \tag{4.9}$$

Chaque ϕ_ε est donc une fonction de $\mathcal{D}$, normalisée au sens de $L^1(\Omega)$, dont le support est la boule de centre 0 et de rayon ε (voir figure 4.3). On peut facilement peupler $\mathcal{D}$ grâce à un procédé de convolution (voir annexe C.7) : pour tout $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et tout compact K de Ω, on pose : $u_\varepsilon = \phi_\varepsilon * u_{|K}$, où ε est choisi suffisamment petit pour que $\text{supp}(u_\varepsilon) \subset \Omega$; ainsi, $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Un exemple important est donné à la figure 4.4 puisqu'on y réalise une régularisation de la fonction indicatrice du segment $[-1, 1]$. On observe que $\psi_\varepsilon * \chi_{[-1,1]}$ a pour support $[-(1+\varepsilon), 1+\varepsilon]$ et qu'elle vaut 1 sur $[-(1-\varepsilon), 1-\varepsilon]$ (pour $\varepsilon < 1$).

Une application est qu'il est possible pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K compact de Ω, de construire une voisinage compact $\tilde{K}$ de K dans Ω.

Proposition 4.2. *$C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans C_c^0 au sens de la convergence uniforme.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

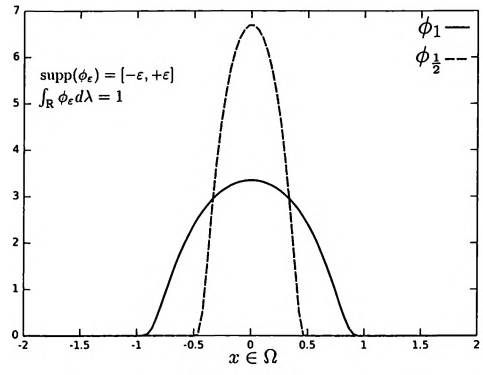


Figure 4.3 - Éléments d'une approximation de l'identité

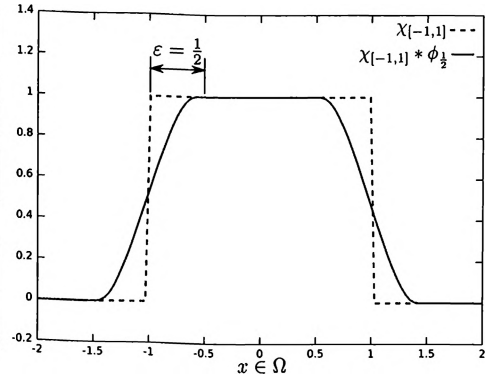


Figure 4.4 - Régularisation de l'indicatrice de [−1, 1]

Démonstration. Soit f une fonction continue à support compact $K \subset \Omega$. Alors :

$$\begin{aligned}(f - f * \phi_\varepsilon)(x) &= f(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\phi_\varepsilon(y)d\lambda_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f(x-y))\phi_\varepsilon(y)d\lambda_y \\ &= \int_{B(\varepsilon)} (f(x) - f(x-y))\phi_\varepsilon(y)d\lambda_y\end{aligned} \tag{4.10}$$

où ε est choisi tel que $B(x, \varepsilon) + K \subset \Omega$. f étant continue sur le compact K, elle y est donc uniformément continue et le terme en $|f(x) - f(x-y)|$ peut être rendu aussi petit que voulu en ajustant ε (indépendamment de x). ■

Remarque 4.2

Il est à noter que la convergence uniforme dans la preuve précédente implique toutes les autres formes de convergence. Par ailleurs, ce résultat s'étend aux espaces $C^k(\Omega)$ avec convergence uniforme sur toutes les dérivées. En utilisant les résultats de densité donnés en annexe C, on en déduit que $\mathcal{D}$ est *dense* dans les espaces de Lebesgue pour $1 \leqslant p < \infty$. On dit que ϕ_ε est une *approximation de l'identité*, car pour $f \in L^p(\Omega)$, $\|f - f * \phi_\varepsilon\|_{L^p} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$. La figure 4.3 donne deux de ces fonctions dans le cas unidimensionel.

4.3 Espace des distributions

Définition 4.2

On appelle ***distribution*** sur Ω toute forme linéaire T continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, on note :

$$T : \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto T(\phi) = \langle T, \phi \rangle \in \mathbb{R}$$

Les « crochets » sont en effet une notation classique en dualité.

Remarque 4.3

i. La linéarité signifie que pour $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(\Omega)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\langle T, \phi_1 + \alpha\phi_2 \rangle = \langle T, \phi_1 \rangle + \alpha \langle T, \phi_2 \rangle$$

ii. La continuité (séquentielle) signifie que pour toute suite $(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle T, \phi_p \rangle \to \langle T, \phi \rangle$$

iii. La linéarité implique que la continuité en 0 est équivalente à la continuité dans tout $\mathcal{D}(\Omega)$.

Notation

On désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 4.3. *$\mathcal{D}'(\Omega)$ est un espace vectoriel : pour $(T_1, T_2) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\alpha T_1 + T_2) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ au sens suivant :*
$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle \alpha T_1 + T_2, \phi \rangle = \alpha \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle \tag{4.11}$$

Proposition 4.4. *Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists m_K \in \mathbb{N}$ et $\exists C_K > 0$ tels que :*

$$|T(\phi)| = |\langle T, \phi \rangle| \leqslant C_K \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m_K} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty} \right),$$
$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } \operatorname{supp}(\phi) \subset K \tag{4.12}$$

Si dans la définition on peut utiliser le même entier m (indépendamment de K) on dit alors que la distribution est d'ordre *m.*

Démonstration. Une forme linéaire qui vérifie l'équation (4.12) est clairement continue sur $\mathcal{D}$, c'est donc une distribution.
Réciproquement, il faut prouver qu'une forme linéaire T continue sur $\mathcal{D}$ vérifie (4.12). On raisonne par l'absurbe : on suppose qu'il existe un compact K de Ω tel que pour tout entier m et toute constante $C > 0$, il existe une fonction $\phi_{m,C}$ de $\mathcal{D}$ à support dans K telle que

$$|\langle T, \phi_{m,C} \rangle| > C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \phi_{m,C}\|_{L^\infty} \tag{4.13}$$

On choisit $C = m = N$, et comme d'après l'inégalité précédente $\phi_{N,N}$ ne peut pas être nulle, on peut s'arranger (en multipliant l'inégalité par un scalaire positif) pour que

$$\sup_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \phi_{N,N}\|_{L^\infty} = \frac{1}{N} \tag{4.14}$$

On en déduit que $\forall N$, $|\langle T, \phi_{N,N} \rangle| > 1$. Par ailleurs l'équation précédente et le fait que les $(\phi_{N,N})$ ont leur support dans K implique que $\phi_{N,N} \to 0$ dans $\mathcal{D}$. On a donc une contradiction avec la continuité de T. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Contrairement à $\mathcal{D}(\Omega)$, on munit $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une topologie très faible (de manière à ce qu'il soit « facile » de converger dans $\mathcal{D}'$).

Définition 4.3

On dit qu'une suite de distributions $(T_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *converge dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers une distribution T si :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle T_p, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle \tag{4.15}$$

La convergence est dite ***faible***.

Proposition 4.5. *Si $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de distributions et si, pour tout ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_p, \phi\rangle$ converge dans $\mathbb{R}$, alors $\phi \mapsto \lim\limits_{p\to+\infty} \langle T_p, \phi\rangle$ est une distribution (on parle de complétude séquentielle de $\mathcal{D}'$).*

Démonstration. Ce théorème est admis, la démonstration fait appel au principe de la borne uniforme (théorème de Banach-Steinhaus) afin de pouvoir échanger les limites de la suite de distributions et de la suite de fonctions. ■

Le résultat précédent est fondamental puisqu'il permet de prouver des densités d'espaces dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et donc de donner des techniques d'approximation de distributions (par des fonctions).

Théorème 4.6. ***Association fonction – distribution***

i. *Soit $f \in L^1_{loc}$ une fonction localement intégrable. L'application*

$$T_f : \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f\phi d\lambda \tag{4.16}$$

est une distribution d'ordre 0.

ii. *Soit $f \in L^1_{loc}$, $g \in L^1_{loc}$ alors*

$$T_f = T_g \Leftrightarrow f \underset{pp}{=} g \tag{4.17}$$

autrement dit $L^1_{loc}(\Omega)$ peut être injecté dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration.

On a $|f\phi| \leqslant |f|\ \|\phi\|_{L^\infty}$ et f est intégrable sur le compact $K = \text{supp}(\phi)$ donc

$$\left|\langle T_f, \phi\rangle\right| = \left|\int_\Omega f\phi d\lambda\right| \leqslant \left(\int_K |f| d\lambda\right) \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

ce qui, cumulé à l'évidente linéarité, prouve que T_f est une distribution d'ordre 0 (pas de dérivation dans la majoration).

On suppose que f est telle que $T_f = 0$. Soit $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \subset \Omega$, on note $\chi_{B(x_0,r)}$ la fonction indicatrice de $B(x_0, r)$. On pose $\tilde{f} = f\chi_{B(x_0,r)} \in L^1(\Omega)$. On utilise l'approximation de l'identité ϕ_ε définie à l'équation (4.9) avec $\varepsilon < r$, et on pose $\varphi_{\varepsilon,x} : y \mapsto \varphi_{\varepsilon,x}(y) = \phi_\varepsilon(x - y)$. On a alors :

$$\tilde{f} * \phi_\varepsilon = \int_{B(x_0,r)} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy = \int_\Omega f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy = \langle T_f, \varphi_{\varepsilon,x}\rangle = 0$$

Par ailleurs, $\tilde{f} * \phi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \tilde{f}$ dans L^1 et donc $f \underset{pp}{=} 0$ sur $B(x_0, r)$ où x_0 a été choisi arbitrairement. Finalement, $T_f = 0 \Rightarrow f \underset{pp}{=} 0$. ■

Remarque 4.4

Une conséquence de ce théorème est la confusion fréquente entre une fonction f et sa distribution associée T_f.
Il n'en reste pas moins qu'il est incorrect de parler de la valeur d'une distribution en un point : une distribution n'a de valeur qu'appliquée à une fonction test. Même dans les cas où la distribution peut être associée à une fonction, l'association n'a de sens que presque partout.

Exemple 4.1

i. La distribution de Dirac[†] $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution qui n'est pas associable à une fonction : $\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0)$. Par ailleurs, $|\phi(0)| < \|\phi\|_{L^\infty}$ et donc la distribution de Dirac est d'ordre 0.

ii. La distribution de Dirac en x_0 : $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega) : \phi \in \mathcal{D} \mapsto \langle \delta_{x_0}, \phi\rangle = \phi(x_0)$.

iii. La distribution de Heaviside[‡] sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:
$\phi \in \mathcal{D} \mapsto \langle H, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^+} \phi d\lambda$ provient bien d'une fonction L^1_{loc} (en l'occurrence l'indicatrice $\chi_{(0,+\infty[}$). S'interroger sur la « valeur d'Heaviside en 0 » ne correspond à rien, l'identification se fait au sens de L^1_{loc}, et $\{0\}$ est un ensemble de mesure nulle.

Définition 4.4 Conjugaison

Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on introduit la ***distribution conjuguée*** $\bar{T}$ par :

$$\langle \bar{T}, \phi\rangle = \overline{\langle T, \bar{\phi}\rangle} \tag{4.18}$$

Remarque 4.5

T est réelle si et seulement si $\bar{T} = T$.

†. Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), physicien et mathématicien britannique, considéré comme un des « pères » de la mécanique quantique. Il reçut, conjointement avec Erwin Schrödinger, le prix Nobel de physique en 1933.

‡. Oliver Heaviside (1850-1925), physicien britannique, a bien sûr introduit la fonction de Heaviside (aussi appelée *échelon unité* ou *marche*), utilisée communément dans l'étude de systèmes en automatique, mais également reformulé et simplifié les équations de Maxwell.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Définition 4.5

Une distribution est dite ***positive*** si et seulement si :
$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\phi \geqslant 0 \Rightarrow \langle T, \phi \rangle \geqslant 0 \tag{4.19}$$

Définition 4.6

On appelle ***support d'une distribution*** le complémentaire du plus grand ouvert O tel que $\text{supp}\,\phi \subset O \Rightarrow \langle T, \phi \rangle = 0$.

Fondamentalement, on a $\text{supp}(\phi) \cap \text{supp}(T) = \emptyset \Rightarrow \langle T, \phi \rangle = 0$.

On parle bien du support de ϕ et pas simplement de l'ensemble des points où ϕ s'annule : en effet, ϕ peut être nulle sur $\text{supp}(T)$ sans que $\langle T, \phi \rangle$ soit nul.

Ainsi, sur $\mathbb{R}$, la distribution δ', définie par $\langle \delta', \phi \rangle = -\phi'(0)$ a pour support $\{0\}$, la fonction

$$x \mapsto \phi(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right)$$

vaut 0 en 0 mais $\langle \delta', \phi \rangle = -1$. La subtilité est que $0 \in \text{supp}(\phi)$ ($\{0\}$ est dans l'adhérence des points où ϕ n'est pas nulle).

Proposition 4.7. ***Distributions à support compact***

L'ensemble des distributions à support compact $\mathcal{E}'(\Omega)$ est le dual des fonctions $C^\infty(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ (muni de la convergence uniforme sur toutes les dérivées). On a $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

Démonstration. admise ■

Proposition 4.8. *Les distributions à support compact sont toutes d'ordre fini.*

Démonstration. Soit T une distribution à support compact et K un compact de Ω contenant strictement $\text{supp}(T)$. On peut construire (par exemple en régularisant la fonction indicatrice de $\text{supp}(T)$) une fonction f égale à 1 sur $\text{supp}(T)$ infiniment dérivable à support dans K. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $(\phi - f\phi)$ est nulle sur $\text{supp}(T)$. De plus en utilisant la proposition 4.4 pour cette distribution et le compact K, il existe un entier p et une constante C tels que :

$$|\langle T, \phi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha (f\phi)\|_{L^\infty}$$

On peut alors développer la dérivée en utilisant la formule de Leibniz, et on obtient une nouvelle majoration de la forme :

$$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant \tilde{C} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty}$$

où $\tilde{C}$ dépend de C et des $\|\partial^\beta f\|_{L^\infty}$, β désignant un multientier inférieur à α.† ■

On peut alors préciser le résultat précédent.

Proposition 4.9. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, d'ordre p.*
Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est telle que $\partial^\alpha \phi(\mathrm{supp}(T)) = 0$ pour tout $|\alpha| \leqslant p$, alors :

$$\langle T, \phi\rangle = 0$$

Démonstration. Afin de simplifier la démonstration, on se place sur $\mathbb{R}$, le cas général s'obtient en utilisant des multientiers.

On note K_ε l'ensemble des points dont la distance à $\mathrm{supp}(T)$ est inférieure ou égale à ε, et on choisit n suffisamment grand pour que $\mathrm{supp}(T) \subset K_{\frac{1}{n}} \subset K_{\frac{2}{n}} \subset \Omega$.

On peut construire (par régularisation de la fonction indicatrice) une fonction ψ_n telle que

$$\psi_n\left(K_{\frac{1}{n}}\right) = 1 \ , \ \mathrm{supp}_n \psi \subset K_{\frac{2}{n}} \ , \ \|\psi_n^{(\alpha)}\|_{L^\infty} \leqslant n^\alpha$$

On prend alors $x \in K_{\frac{2}{n}}$ et $x_0 \in \mathrm{supp}(T)$ tels que $|x - x_0| < \frac{2}{n}$.
Pour $\beta \leqslant p$, on effectue un développement de Taylor de ϕ à l'ordre $p-\beta$ en utilisant la nullité des p premières dérivées ϕ sur $\mathrm{supp}(T)$, on obtient l'existence d'une constante C telle que :

$$|\phi^{(\beta)}(x)| \leqslant \left|\sum_{\alpha=0}^{p-\beta} \frac{(x-x_0)^\alpha\, \phi^\alpha(x_0)}{\alpha!}\right| + C'|x-x_0|^{p+1-\beta} \leqslant C\frac{1}{n^{p+1-\beta}}$$

On écrit alors $\langle T, \phi\rangle = \langle T, \phi - \psi_n\phi\rangle + \langle T, \psi_n\phi\rangle$ où le terme de gauche est nul, car la fonction est nulle sur $K_{\frac{1}{n}}$ qui contient strictement $\mathrm{supp}(T)$; pour le terme de droite, on utilise le fait que la distribution est d'ordre fini, et on développe les dérivées avec la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}|\langle T, \phi\rangle| &\leqslant A \sum_{\alpha\leqslant p} \|(\phi\psi_n)^{(\alpha)}\|_{L^\infty} \\ &\leqslant A \sum_{\alpha\leqslant p}\sum_{\beta\leqslant\alpha} \|\phi^{(\beta)}\|_{L^\infty}\|\psi_n^{(\alpha-\beta)}\|_{L^\infty} \quad \leqslant B \sum_{\beta\leqslant\alpha} \frac{n^{\alpha-\beta}}{n^{p+1-\beta}} \leqslant \frac{D}{n}\end{aligned}$$

La majoration étant valable pour tous les n suffisamment grands, on obtient le résultat. ■

†. Dans le cas $p = 1$, on a :

$$\sum_{|\alpha|\leqslant p} \|\partial^\alpha(f\phi)\|_{L^\infty} = \|f\phi\|_{L^\infty} + \|f'\phi + f\phi'\|_{L^\infty} \leqslant \|\phi\|_{L^\infty}(\|f\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^\infty}) + \|\phi'\|_{L^\infty}\|f\|_{L^\infty}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

4.4 Dérivation d'une distribution

Définition 4.7

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout j de $\{1, \ldots, d\}$, on définit la distribution $\dfrac{\partial T}{\partial x_j}$ par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle \tag{4.20}$$

et donc, par récurrence, pour tout multientier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$:

$$\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle \tag{4.21}$$

Cette définition a évidemment un sens : $\mathcal{D}$ est stable par dérivation, la convergence dans $\mathcal{D}$ implique celle de toutes les fonctions dérivées, et le support d'une fonction est réduit par dérivation. De plus, il est clair que si T est une distribution d'ordre fini k_T, alors $\partial^\alpha T$ est une distribution d'ordre $(k_T + |\alpha|)$.

Proposition 4.10. *Si $\left(T_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ convergeant vers T alors :*

$$\frac{\partial T_p}{\partial x_j} \to \frac{\partial T}{\partial x_j} \tag{4.22}$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par suite :

$$\left\langle \frac{\partial T_p}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = -\left\langle T_p, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle \to -\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle \qquad \blacksquare$$

Exemple 4.2

On a $H' = \delta$.

En effet : soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}^+} \phi' \, d\lambda = -\left[\phi\right]_0^{+\infty} = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle \tag{4.23}$$

Exemple 4.3 Dérivation usuelle

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On va voir que la formule de dérivation des distributions est cohérente avec l'intégration par parties.

La dérivée de la distribution T_f associée à f est la distribution associée à sa dérivée :

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \qquad \Rightarrow \qquad (T_f)' = T_{f'}$$

En effet, soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut supposer $\text{supp}(\phi) \subset [k_1, k_2]$, on a en particulier $\phi(k_1) = \phi(k_2) = 0$ et :

$$\langle (T_f)', \phi \rangle = -\langle T_f, \phi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f'\phi d\lambda - [f\phi]_{k_1}^{k^2} = \langle T_{f'}, \phi \rangle$$

La dérivation au sens des distributions permet de définir la dérivée d'une distribution associée à une fonction discontinue (le résultat de cette dérivation est une distribution).

Notation

Soit f une fonction présentant une discontinuité en un point x_0.
On introduit la notation « saut » par :

$$[\![f]\!](x_0) = f(x_0^+) - f(x_0^-)$$

Le saut est donc nul partout où une fonction est continue.

Exemple 4.4 Dérivation d'une distribution associée à une fonction discontinue

Soit $f \in C^1_M(\mathbb{R})$, de classe C^1 par morceaux, présentant une unique discontinuité en un point x_0. Si on suppose, en outre, que $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors :

$$(T_f)' = T_{f'} + [\![f]\!](x_0)\delta_{x_0}$$

En effet, soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on sépare $\mathbb{R}$ en des domaines où les fonctions sont suffisamment régulières pour une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \phi \rangle &= -\langle T_f, \phi' \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f\phi' d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{x_0} f'\phi d\lambda - [f\phi]_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{\infty} f'\phi d\lambda - [f\phi]_{x_0}^{\infty} \qquad (4.24) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f'\phi d\lambda + [\![f]\!](x_0)\phi(x_0) \\
&= \langle T_{f'} + [\![f]\!](x_0)\delta_{x_0}, \phi \rangle
\end{aligned}$$

Exemple 4.5

Considérons le milieu bidimensionnel de $\mathbb{R}^2$ constitué de deux domaines homogènes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$, et étudions l'équation de conservation de la chaleur donnée au sens des distributions :

$$\text{div}(q) = s \qquad (4.25)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Autrement dit, pour ϕ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}\langle s, \phi\rangle &= \langle \mathrm{div}(q), \phi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{div}(q)\phi d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-} \mathrm{div}(q)\phi d\lambda + \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \mathrm{div}(q)\phi d\lambda \\ &= -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-} q\,\mathrm{grad}(\phi) d\lambda - \int_{\mathbb{R}} q_y(0^-)\phi(0) d\lambda_x - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} q\,\mathrm{grad}(\phi) d\lambda + \int_{\mathbb{R}} q_y(0^+)\phi(0) d\lambda_x\end{aligned}$$

On a séparé le domaine d'intégration de manière à intégrer par parties sur des sous-domaines où q était suffisamment régulier.

Si on choisit une fonction ϕ à support dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-$ ou (exclusif) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, on retrouve l'équation $\mathrm{div}(q) = s$ au sens classique.

Par contre, sur la ligne de discontinuité, on obtient :

$$[\![q_y]\!](y = 0) = 0$$

ce qui signifie que le saut de flux normal de chaleur doit être nul (résultat classique en physique).

Écrire une loi de conservation *au sens des distributions* permet donc la prise en compte des cas continus et discontinus.

Proposition 4.11. *Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et tout multientier α :*

$$\mathrm{supp}(\partial^\alpha T) \subset \mathrm{supp}(T)$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\mathrm{supp}(\phi) \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$ (donc $\langle T, \phi\rangle = 0$).

Alors : $\langle \partial^\alpha T, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \phi\rangle = 0$, puisque $\mathrm{supp}(\partial^\alpha\phi) \subset \mathrm{supp}(\phi)$.

Par suite : $\mathrm{supp}(\phi)\cap\mathrm{supp}(\partial^\alpha T) = \emptyset$. Le complémentaire de $\mathrm{supp}(T)$ est donc inclus dans le complémentaire de $\mathrm{supp}(\partial^\alpha T)$. ■

4.5 Opérations

4.5.1 Produit par une fonction infiniment dérivable

S'il n'est malheureusement pas possible de définir le produit de deux distributions, on peut néanmoins définir le produit d'une distribution par une fonction infiniment dérivable.

Définition 4.8

Soit $\psi \in C^\infty(\Omega)$, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit la distribution ψT par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle \psi T, \phi \rangle = \langle T, \psi \phi \rangle$$

Remarque 4.6

Comme $\psi\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'expression a bien un sens. Par ailleurs, il faut vérifier que ψT est bien une distribution. La linéarité est évidente.
Pour la continuité : soit $\left(\phi_p\right)_{p\in\mathbb{N}} \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle \psi T, \phi_p \rangle = \langle T, \psi\phi_p \rangle$, il suffit de montrer que $\left(\psi\phi_p\right)_{p\in_N} \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.
Soit K le support compact commun des ϕ_p, ψ étant continue elle atteint son sup sur K et :

$$\|\phi_p\psi\|_{L^\infty(K)} \leqslant \|\phi_p\|_{L^\infty(K)}\|\psi\|_{L^\infty(K)} \to 0$$

et concernant une dérivée première (les suivantes s'en déduisent), en omettant l'indice $L^\infty(K)$ sur les normes pour raccourcir l'expression :

$$\left\|\frac{\partial(\phi_p\psi)}{\partial x_j}\right\| = \left\|\frac{\partial\phi_p}{\partial x_j}\psi + \phi_p\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right\| \leqslant \left\|\frac{\partial\phi_p}{\partial x_j}\right\|\|\psi\| + \|\phi_p\|\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right\| \to 0$$

La convergence au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$ de la suite $(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ permet de conclure.
On a alors :

$$\langle \psi T, \phi_p \rangle = \langle T, \psi\phi_p \rangle \to \langle T, 0 \rangle = 0$$

Proposition 4.12. *Pour $\psi \in C^\infty(\Omega)$, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:*

$$\operatorname{supp}(\psi T) \subset \operatorname{supp}(T) \cap \operatorname{supp}(\psi) \tag{4.26}$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tel que : $\operatorname{supp}(\phi) \cap (\operatorname{supp}(T) \cap \operatorname{supp}(\psi)) = \emptyset$.
Alors : $\langle \psi T, \phi \rangle = 0$. Par suite : $\operatorname{supp}(\psi T) \subset \operatorname{supp}(T) \cap \operatorname{supp}(\psi)$. ■

4.5.2 Translation et symétrie

Notation

Pour tout h de Ω, et tout ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$, on désigne par ϕ_h la *translatée* de ϕ :

$$\phi_h : x \in h + \Omega \mapsto \phi_h(x) = \phi(x - h) \tag{4.27}$$

Définition 4.9

Pour tout h de Ω, on désigne par T_h la *translatée* de la distribution T de $\mathcal{D}'(\Omega)$, définie pour tout ϕ de $\mathcal{D}(\Omega - h)$ par :

$$\langle T_h, \phi \rangle = \langle T, \phi_{-h} \rangle \tag{4.28}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Notation

Pour toute fonction f définie sur Ω (ouvert supposé symétrique par rapport à 0), on désigne par $\check{f}$ la *symétrisée* de f, définie pour tout x de Ω par :

$$\check{f}(x) = f(-x) \tag{4.29}$$

Définition 4.10

On désigne par $\check{T}$ la *symétrisée* de la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, définie pour tout ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ par :

$$\langle \check{T}, \phi \rangle = \langle T, \check{\phi} \rangle \tag{4.30}$$

Remarque 4.7

$\widecheck{(\phi_h)} = (\check{\phi})_{-h}$

Remarque 4.8

Ces formules sont l'analogue des formules de changements de variables dans une intégration : si u est un C^1 difféormorphisme de $\tilde{\Omega}$ dans Ω, pour $x \in \Omega$ on pose $\tilde{x} = u^{-1}(x)$ et pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ on définit $\tilde{f} = f \circ u \in L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$, pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\tilde{\phi} = \phi \circ u \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ et

$$\int_{\Omega} f\phi d\lambda_x = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f}\tilde{\phi} \left| \det\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}\right) \right| d\lambda_{\tilde{x}}$$

où on reconnaît notamment l'intervention de la valeur absolue du jacobien du changement de variables. De même, pour un changement de variables dont le jacobien est C^∞, on peut associer à $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ la distribution $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ telle que :

$$\langle T, \phi \rangle = \langle \tilde{T}, \left| \det\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}\right) \right| \tilde{\phi} \rangle$$

Typiquement, on peut parler de dilatation de distribution (voir le chapitre sur les transformations intégrales), de distribution en coordonnées polaires ...

4.5.3 Convolution

Définition 4.11 Convolution d'une distribution et d'une fonction

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (respectivement $\mathcal{E}'$), et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (respectivement $\mathcal{E}$).

On définit la ***convolution*** de la distribution T et de la fonction ϕ comme étant la fonction, notée $T * \phi$, définie par :

$$(T * \phi)(x) = \langle \check{T}, \phi_x \rangle = \langle T, \check{\phi}_{-x} \rangle \tag{4.31}$$

Proposition 4.13.

i. $\dfrac{\partial (T * \phi)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial T}{\partial x_j} * \phi = T * \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j}$ *et* $T * \phi \in \mathcal{E}(\Omega)$.

ii. $\text{supp}(T * \phi) \subset \text{supp}(T) + \text{supp}(\phi)$.

iii. $T * (\phi * \psi) = (T * \phi) * \psi = (T * \psi) * \phi$.

iv. Pour ϕ donné dans $\mathcal{D}(\Omega)$, la fonction de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ qui à T associe $T * \phi$ est injective et continue.

v. Pour T donné, la fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ qui à ϕ associe $T * \phi$ est injective et continue.

Démonstration. Pour simplifier, on ne considère ici que le cas unidimensionnel, $\Omega = \mathbb{R}$ et on pose : $f(x) = (T * \phi)(x)$. On a alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\langle T, \check{\phi}_{-(x+h)}\rangle - \langle T, \check{\phi}_{-x}\rangle\right) = \langle T, \frac{\check{\phi}_{-(x+h)} - \check{\phi}_{-x}}{h}\rangle$$

D'après les propriétés de ϕ,

$$\frac{\check{\phi}_{-(x+h)} - \check{\phi}_{-x}}{h}(y) = \frac{\phi(x+h-y) - \phi(x-y)}{h} \underset{h\to 0}{\to} \phi'_{-x}(-y) = \overbrace{\phi'_x}^{\vee}(y)$$

Par continuité de T, on peut passer à la limite dans le crochet :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = \langle \check{T}, \phi'_x\rangle = T * \phi'$$

Pour l'autre égalité, il suffit de remarquer que $\overbrace{\phi'_x}^{\vee} = -\overbrace{\phi_x}^{\vee\prime}$, donc, pour faire porter la dérivée sur la distribution il faut changer le signe une fois de plus et $f'(x) = T' * \phi$.

Les autres propriétés se démontrent sans difficulté. ■

Définition 4.12 Convolution de deux distributions

Soit T et S deux distributions dont au moins une est à support compact, on définit la *convolution de T et S* comme étant la seule distribution vérifiant :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \ : \ (T * S) * \phi = T * (S * \phi) \tag{4.32}$$

Remarque 4.9

Cette définition donne bien une unique distribution grâce à l'injectivité de la convolution entre une distribution et une fonction.

Proposition 4.14. *Soient T, S, U trois distributions dont deux au moins sont à support compact. Alors :*

i. $T * S = S * T$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ii. $\dfrac{\partial(T * S)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial T}{\partial x_j} * S = T * \dfrac{\partial S}{\partial x_j}$.

iii. $\text{supp}(T * S) \subset \text{supp}(T) + \text{supp}(S)$.

iv. $T * (S * U) = (T * S) * U = T * (S * U)$.

Proposition 4.15. ***Élément neutre pour la convolution***

$$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \; : \; T * \delta = T \tag{4.33}$$

Remarque 4.10

Ce résultat (cas particulier de la translation, prouvé plus bas) couplé à la propriété 4.5, montre que l'approximation de l'identité ϕ_ε (4.9) converge (au sens des distributions) vers la distribution de Dirac.
D'après la proposition 4.13, pour une distribution T, $T * \phi_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.
Ainsi, toute distribution est alors la limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, ce résultat s'étend même à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ en utilisant un procédé de troncature.
Au final, on obtient la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Remarque 4.11

On peut étendre la définition de la convolution à des cas où aucune distribution n'est à support compact : il faut pour cela que les distributions aient des « supports convolutifs » : étant donné $(U, V) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)^2$, on dit que U et V sont ***à supports convolutifs*** si, lorsque $x \in \text{supp}(U)$ et $y \in \text{supp}(V)$ sont tels que $(x + y)$ parcourt un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$, alors, x et y parcourent tous les deux des ensembles bornés.
Un cas d'application classique concerne les fonctions et distributions « causales » (définies sur $\mathbb{R}$ et à support dans $\mathbb{R}^+$), que l'on note $\mathcal{D}_+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.
Toutes les propriétés précédentes restent vraies pour des distributions à supports convolutifs.

Remarque 4.12

On peut définir les deux algèbres de convolution $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d), +, *, .)$ et $(\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}), +, *, .)$.

Proposition 4.16. ***Translation et convolution***

$$\begin{aligned} \forall (h, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(\mathbb{R}) \; : \; \psi_h = \delta_h * \psi \\ \forall (h, T) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \; : \; T_h = \delta_h * T \end{aligned} \tag{4.34}$$

Démonstration.

Translation d'une fonction ψ : $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} (\delta_h * \psi)(x) &= \langle \overbrace{\delta_h}^{\check{}}, \psi_x \rangle = \langle \delta_h, \check{\psi}_{-x} \rangle \\ &= \langle \delta, (\check{\psi}_{-x})_{-h} \rangle = \langle \delta, \check{\psi}_{-x+h} \rangle = \psi(x - h - 0) = \psi(x)_h \end{aligned}$$

Translation d'une distribution : soit T une distribution et $\phi \in \mathcal{D}$.

$$(\delta_h * T) * \phi = T * (\delta_h * \phi) = T * \phi_h$$

$$T * \phi_h(x) = \langle \check{T}, (\phi_h)_x \rangle = \langle \check{T}, \phi_{x+h} \rangle = \langle T, \widecheck{(\phi_{x+h})} \rangle$$

$$= \langle T, \widecheck{(\phi_x)}_{-h} \rangle = \langle T_h, \widecheck{(\phi_x)} \rangle = \langle \widecheck{(T_h)}, \phi_x \rangle = T_h * \phi(x) \qquad \blacksquare$$

4.6 Distributions tempérées

Pour certaines applications (transformations de Fourier notamment), les distributions sont définies de façon un peu trop générale. On utilise alors un sous-ensemble des distributions appelé ensemble des distributions tempérées. Ce sous-ensemble est également défini par dualité (d'un ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dit de Schwartz, plus grand que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$).

Définition 4.13

On définit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ comme ***l'espace des fonctions à décroissance rapide***, c'est-à-dire des fonctions dont toutes les dérivées multipliées par des polynômes arbitraires tendent vers 0 à l'infini : α et β étant des multientiers de $\mathbb{N}^d$,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) / \forall k \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}^d,\, |\alpha| \leqslant k,\, |\beta| \leqslant k} | x^\beta \partial^\alpha u(x) | < +\infty \right\} \qquad (4.35)$$

Remarque 4.13

En pratique, il s'agit le plus souvent de fonctions avec une exponentielle négative en facteur, typiquement $x \mapsto e^{-|x|}$.
Bien sûr, les fonctions de $\mathcal{S}$ sont bornées et ont toutes leurs puissances intégrables ($\mathcal{S} \subset L^p$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

Remarque 4.14

$\mathcal{S}$ est un espace vectoriel stable par dérivation et par multiplication par une fonction polynomiale.

Définition 4.14

On parle de convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour des suites de fonctions dont toutes les dérivées pondérées par n'importe quel polynôme convergent uniformément :
une suite $\left(\phi_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ tend vers ϕ dans $\mathcal{S}$ si et seulement si, pour tous multientiers $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ de $\mathbb{N}^d$:

$$\left\| x^\alpha \partial^\beta (\phi_p - \phi) \right\| \underset{p \to +\infty}{\to} 0 \qquad (4.36)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Définition 4.15

Le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des ***distributions tempérées***. La convergence utilisée est la convergence faible (la même que sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$).

Proposition 4.17. *Les distributions à support compact sont toutes tempérées.*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \qquad et \qquad \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

Proposition 4.18. *Les fonctions $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ à croissance modérée (majorées par une fonction polynomiale), s'identifient à des distributions tempérées.*

Démonstration. Pour f à croissance modérée, il existe C et $N \geqslant 0$ tels que pour tout x de $(\mathbb{R}^d)$:

$$|f(x)| \leqslant C(1 + |x|)^N$$

Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f\phi \, d\lambda \right| \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^N |\phi| d\lambda$$

qui est bien définie.

La linéarité et la continuité s'obtiennent de manière classique. ■

Exemple 4.6

Le Dirac (distribution à support compact) et l'échelon de Heaviside (identifiable à une fonction à croissance modérée) sont des distributions tempérées.

Exercices

4.1 Primitive d'une distribution

1. Trouver les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $T' = 0$.
2. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, trouver une primitive $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $T' = S$.
3. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution telle que $S * H$ ait du sens (typiquement une distribution causale). Montrer que $S * H$ est une primitive de $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4.2 Valeur principale de $\frac{1}{x}$

Cet exercice a pour objectif d'étudier la distribution associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

La définition requiert donc un peu de précaution :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle Vp_{\frac{1}{x}}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

1. Vérifier que cette définition a du sens et que $Vp_{\frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Trouver une primitive (au sens des distributions) de $Vp_{\frac{1}{x}}$.

On pourra à chaque question vérifier que $Vp_{\frac{1}{x}}$ est une distribution d'ordre 1.

4.3 Multiplication par une fonction

1. Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (a) On définit αT par $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$.
   Montrer que αT est une distribution.
   (b) Montrer que, au sens des distributions : $\frac{d}{dx}(\alpha T) = \frac{d\alpha}{dx} T + \alpha \frac{dT}{dx}$.
2. On cherche à résoudre l'équation $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que résoudre ce problème revient à trouver T tel que, pour tout Φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(0) = 0$:
   $$\langle T, \Phi \rangle = 0$$
   (b) En déduire que $T = c\delta$.
3. En déduire les solutions de $xT = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $x\delta' = -\delta$
5. En utilisant les propositions 4.8 et 4.9 montrer que toute distribution à support concentré en $\{0\}$ est une combinaison linéaire de dérivées de la distribution de Dirac.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

4.4 Équations différentielles et fonctions de Green

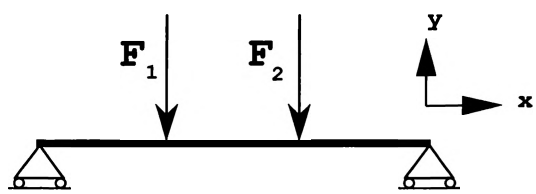
Soit a une constante réelle strictement positive. On considère l'équation (4.37) au sens des distributions

$$\frac{dT}{dt} + aT = \delta \tag{4.37}$$

1. On considère le changement de distribution inconnue $S = e^{at}T$.
   (a) Quelle est l'équation satisfaite par S ?
   (b) On suppose que S est une distribution causale. Calculer $H * \frac{dS}{dt}$ et en déduire une solution particulière T de l'équation (4.37).
   (c) Quelle est la solution U de l'équation $\frac{dU}{dt} + aU = \delta_b$, où δ_b désigne la distribution de Dirac au point b ?
2. On considère l'équation au sens des distributions $\mathcal{L}(G) = \delta$, où $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants.
   Soit $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution.
   (a) Soit f une distribution telle que $S = G * f$ ait un sens. Calculer $\mathcal{L}(S)$.
   (b) En déduire une solution particulière de l'équation $\frac{dV}{dt} + aV = f$.

4.5 Équation différentielle avec discontinuités

Soit une poutre horizontale de longueur 3ℓ reposant sur deux appuis simples, chargée en ℓ avec $\overrightarrow{F_1} = -F_1\overrightarrow{y}$, et en 2ℓ avec $\overrightarrow{F_2} = -F_2\overrightarrow{y}$.



On désigne par T l'effort tranchant et M le moment fléchissant.

L'équilibre de la poutre se traduit au sens des distributions par les relations suivantes (δ_x désigne la distribution de Dirac au point x) :

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} - F_1\delta_\ell - F_2\delta_{2\ell} = 0 \\ \dfrac{dM}{dx} + T = 0 \end{cases} \qquad \text{et } M(\ell) = M(3\ell) = 0$$

1. Exprimer T et M en fonction de la distribution d'Heaviside H.
2. Tracer les graphes des fonctions T et M sur $[0, 3\ell]$ (on prendra $F_2 = 2F_1$).

Pour aller plus loin

Un exercice supplémentaire et son corrigé sont en accès libre à partir des pages d'accueil du livre sur le site www.dunod.com

Corrigés

4.1 1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$0 = \langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle$$

On commence par chercher à quelle condition une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ peut être la dérivée d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Autrement dit, à quelle condition, pour une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donnée, existe-t-il une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi = \phi'$?

Comme les fonctions sont à support compact, elles sont nulles pour des $x \in \mathbb{R}$ suffisamment grands (en valeur absolue). On peut écrire $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$ et la condition est qu'il faut que $\int_{\mathbb{R}} \psi d\lambda = 0$ pour que ψ soit la dérivée d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Le problème se reformule donc en chercher les distributions qui sont nulles sur les fonctions de $\mathcal{D}$ dont la moyenne est nulle :

$$\text{Trouver } T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) / \langle T, \psi \rangle = 0, \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ avec } \int_{\mathbb{R}} \psi d\lambda = 0$$

Soit alors $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \theta = 1$, et $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On peut écrire : $\Phi = \left(\int_R \Phi d\lambda\right)\theta + \psi$ avec $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi d\lambda = 0$.

Par suite :

$$\langle T, \Phi \rangle = \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi d\lambda\right) \langle T, \theta \rangle + \langle T, \psi \rangle = \langle \langle T, \theta \rangle, \Phi \rangle$$

La distribution T s'identifie à la constante $\langle T, \theta \rangle$.

2. On a

$$\langle T, \phi' \rangle = -\langle S, \phi \rangle$$

T est donc connue sur les fonctions à intégrale nulle :

$$\langle T, \psi \rangle = \langle S, \int_{-\infty}^{x} \psi dx \rangle$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Par suite :

$$\langle T, \Phi\rangle = \langle T, \psi\rangle + \langle T, \theta\rangle\langle 1, \Phi\rangle$$

$$\langle T, \Phi\rangle = \langle S, \int_{-\infty}^{x} \psi dx\rangle + \langle\langle T, \theta\rangle, \Phi\rangle$$

La primitive est donc connue à une constante arbitraire $\langle T, \theta\rangle$ près.

3. On a $(S * H)' = S * H' = S * \delta = S$. Pour cette raison, H est appelé *intégrateur* en traitement du signal.

4.2 1. Il convient tout d'abord de s'assurer que cette définition a un sens.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant impaire, il est intéressant d'introduire la décomposition de ϕ suivant sa partie paire ϕ^p et sa partie impaire ϕ^i.
ϕ^p et ϕ^i sont toutes deux des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Soit $k > 0$ tel que le compact $[-k, k]$ (symétrique) contienne les supports respectifs de ϕ^p et ϕ^i. Alors :

$$\langle Vp_{\frac{1}{x}}, \phi\rangle = 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{[\varepsilon,k]} \frac{\phi^i(x)}{x} dx$$

Or, comme $\phi^i(x) = \int_0^x \phi^{i\prime}(t)\, dt$, on déduit :

$$\langle Vp_{\frac{1}{x}}, \phi\rangle = 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{[\varepsilon,k]} \frac{\int_0^x \phi^{i\prime}(t)dt}{x} dx$$

$$\left|\langle Vp_{\frac{1}{x}}, \phi\rangle\right| \leqslant 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{[\varepsilon,k]} \frac{\int_0^x |\phi^{i\prime}(t)|dt}{x} dx$$

$$\leqslant 2\|\phi^{i\prime}\|_{L^\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{[\varepsilon,k]} \frac{\int_0^x dt}{x} dx = 2k\|\phi^{i\prime}\|_{L^\infty}$$

On a montré l'absolue convergence (au sens de Riemann) de l'intégrale.
La linéarité de $Vp_{\frac{1}{x}}$ est évidente.
La continuité sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'obtient grâce à la dernière inégalité (si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ dans $\mathcal{D}$, alors $\|\phi^{i\prime}\|_{L^\infty} \to 0$). On voit au passage que $Vp_{\frac{1}{x}}$ est une distribution d'ordre 1.

2. En prenant quelques précautions pour intégrer par parties, on obtient :

$$\langle Vp_{\frac{1}{x}}, \phi\rangle = 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{[\varepsilon,k]} \frac{\phi^i(x)}{x} dx$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{[\varepsilon,k]} \phi^{i\prime}(x)\ln(x)dx + 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\phi^i(x)\ln(x)\right]_\varepsilon^k$$

On a $|\phi^i(\varepsilon)\ln(\varepsilon)| \leqslant |\ln(\varepsilon)\varepsilon|\|\phi^{i\prime}\|_{L^\infty} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$.

On utilise la parité de $\phi^{i'}$ pour intégrer sur $\{|x| > \varepsilon\} \supset]\varepsilon, k] \cup [-k, -\varepsilon[$:

$$\begin{aligned}\langle Vp\tfrac{1}{x}, \phi\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>0}\phi^{i'}(x)\ln|x|dx + 0\\ &= -\int_{\mathbb{R}}\phi^{i'}(x)\ln|x|dx = -\int_{\mathbb{R}}\phi'(x)\ln|x|dx\\ &= -\langle \ln|.|, \phi'\rangle = \langle \ln'|.|, \phi\rangle\end{aligned}$$

On a utilisé la parité de $x \mapsto \ln|x|$ et l'absolue intégrabilité (au sens de Riemann) du logarithme sur tout compact.

La valeur principale est la dérivée au sens des distributions du logarithme. Le logarithme étant une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, il définit une distribution d'ordre 0 et donc sa dérivée est une distribution d'ordre 1.

4.3 1. Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(a) Voir le cours, section 4.5.1.

(b)

$$\begin{aligned}\langle(\alpha T)', \phi\rangle &= -\langle \alpha T, \phi'\rangle = -\langle T, \alpha\phi'\rangle = -\langle T, (\alpha\phi)' - \alpha'\phi\rangle\\ &= -\langle T, (\alpha\phi)'\rangle + \langle T, \alpha'\phi\rangle = \langle T', \alpha\phi\rangle + \langle \alpha' T, \phi\rangle\\ (\alpha T)' &= \alpha'(x)T + \alpha(x)T'\end{aligned}$$

2. On cherche à résoudre l'équation $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(a) Soit $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(0) = 0$, on veut montrer que $\exists\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\Phi = x\varphi$.

On a

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x \Phi'(t)dt = \int_0^1 \Phi'(xy)dy$$

Sous cette forme il apparaît clairement que φ est bien C^∞ et à support compact $\operatorname{supp}(\Phi) \subset \operatorname{supp}\phi$ donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Par suite :

$$\forall\varphi,\ \langle xT, \varphi\rangle = \langle T, x\varphi\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\Phi \text{ avec } \Phi(0) = 0,\ \langle T, \Phi\rangle = 0$$

(b) Soit $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\Phi_1(0) = 1$ donnée *a priori*, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On pose : $\varphi = \Phi_0 + \varphi(0)\Phi_1$.

Par suite : $\Phi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\Phi(0) = 0$.

Si T est solution :

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \Phi_0\rangle + \langle T, \Phi_1\rangle\varphi(0) = \langle T, \Phi_1\rangle\langle\delta, \varphi\rangle$$

Il suffit alors de poser $\langle T, \Phi_1\rangle = c$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

3. D'après l'exercice précédent $\langle xVp_{\frac{1}{x}}, \phi\rangle = \langle Vp_{\frac{1}{x}}, x\phi\rangle = \langle 1, \phi\rangle$, par ailleurs la question précédent assure que les solutions sont définies à un Dirac près, on a donc $T = Vp_{\frac{1}{x}} + c\delta$.
4. $\langle x\delta', \phi\rangle = \langle \delta', x\phi\rangle = -\langle \delta, (x\phi)'\rangle = -\langle \delta, \phi\rangle + \langle \delta, x\phi'\rangle$ et le dernier terme est nul donc $x\delta' = -\delta$.
5. Soit T une distribution dont le support est le compact $\{0\}$, d'après la proposition 4.8 elle est donc d'ordre fini p. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ valant 1 au voisinage de 0, en utilisant un développant de Taylor à l'ordre p (avec reste intégral), toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se met sous la forme :

$$\phi(x) = \sum_{\alpha \leqslant p} \frac{\phi^{(\alpha)}(0)x^\alpha}{\alpha!}\psi(x) + r(x)$$

où $r \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est nulle en 0 ainsi que ses p premières dérivées. D'après la proposition 4.9 on sait que $\langle T, r\rangle = 0$ et donc

$$\begin{aligned}\langle T, \phi\rangle &= \sum_{\alpha \leqslant p} \langle T, \frac{x^\alpha}{\alpha!}\psi(x)\rangle \phi^{(\alpha)}(0) \\ &= \sum_{\alpha \leqslant p} (-1)^\alpha \langle T, \frac{x^\alpha}{\alpha!}\psi(x)\rangle \langle \delta^{(\alpha)}, \phi\rangle\end{aligned}$$

En posant $c_\alpha = (-1)^\alpha \langle T, \frac{x^\alpha}{\alpha!}\psi(x)\rangle$ on obtient $T = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha \delta^{(\alpha)}$.

4.4 1. (a) $T = e^{-at}S$, $\frac{dT}{dt} = e^{-at}\frac{dS}{dt} - ae^{-at}S$ donc $\frac{dS}{dt} = e^{at}\delta = \delta$.

(b) La convolution entre distributions causales est bien définie, on a

$$H * \frac{dS}{dt} = \frac{dH}{dt} * S = \delta * S = S$$

or $\frac{dS}{dt} = \delta$ donc $H * \frac{dS}{dt} = H * \delta = H$, puis $S = H$.
On a donc, finalement : $T = e^{-at}H$.
La convolution des distributions fonctionne pour des distributions à support convolutif, c'est pour cela que la solution de l'équation homogène Ce^{-at} (qui n'est pas causale) n'apparaît pas dans les calculs.

(c) Cette équation est obtenue à partir de la première en utilisant le produit de convolution par δ_b :

$$\delta_b = \delta_b * \delta = \delta_b * \left(\frac{dT}{dt} + aT\right) = \frac{d(\delta_b * T)}{dt} + a(\delta_b * T)$$

Par suite la solution est :

$$U = T_b = \delta_b * T = e^{-a(t-b)}H(t-b)$$

2. (a) $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(G * f) = \mathcal{L}(G) * f = \delta * f = f$.

   (b) On a $V = T * f = e^{-at}H * f$.

4.5

On a :

$$\frac{dT}{dx} - F_1\delta_l - F_2\delta_{2\ell} = 0$$
$$T = F_1H_l + F_2H_{2\ell} + A$$

$$\frac{dM}{dx} + T = 0$$
$$M = -F_1H_l(x-\ell) - F_2H_{2\ell}(x-2\ell) - Ax + B$$

$$M(0) = M(3\ell) = 0$$
$$B = 0,\ A = -\frac{2F_1 + F_2}{3}$$

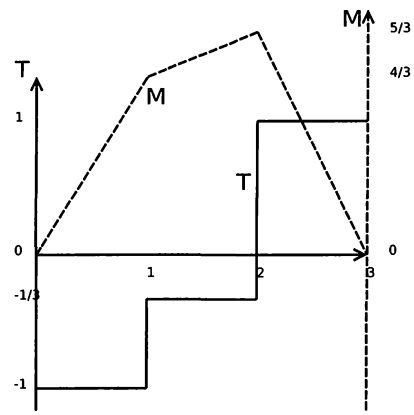


Figure 4.5 - Effort et moment le long de la poutre

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

TRANSFORMATIONS INTÉGRALES

5

Ce chapitre a pour objectif de présenter des techniques de calculs qui consistent à transformer la fonction inconnue f d'une EDP en une nouvelle fonction F via une association de la forme :

$$f \mapsto F : X \mapsto \int_\Omega K(X, x) f(x) dx \tag{5.1}$$

où $K(X, x)$ est appelé **noyau de la transformation**.

Un des intérêts de ce type de transformation peut être de diagonaliser un opérateur différentiel (le laplacien pour la transformée de Fourier, la dérivation en temps pour la transformée de Laplace) et de remplacer des opérations différentielles par des opérations algébriques (produits par des polynômes).

Le lecteur pourra trouver plus de précisions dans [6] et des résultats plus poussés dans [1].

5.1 TRANSFORMATION DE FOURIER

La transformée de Fourier est définie comme étant à valeurs dans $\mathbb{C}$ (même pour des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$), on considérera donc par défaut des fonctions de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

5.1.1 Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On pose† :

$$\hat{u}(\omega) = (\mathcal{F}(u))(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-ix\cdot\omega} d\lambda_x, \qquad \omega \in \mathbb{R}^d \tag{5.2}$$

Étant donné que $|e^{-ix\cdot\omega}| = 1$, la définition a bien un sens.

De plus :

$$|\hat{u}(\omega)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |u| d\lambda_x = \|u\|_{L^1} \tag{5.3}$$

Ainsi, $\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^1}$.

Proposition 5.1. *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : L^1 & \to & L^\infty \cap C^0 \\ u & \mapsto & \hat{u} \end{array} \tag{5.4}$$

est linéaire et continue.

†. $x \cdot \omega = \sum_{i=1}^{d} x_i \omega_i$ est le produit scalaire euclidien.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On peut même préciser l'espace d'arrivée avec la propriété suivante (Riemann-Lebesgue) :

$$|\hat{u}(\omega)| \underset{|\omega|\to+\infty}{\to} 0 \tag{5.5}$$

Démonstration. Pour la démonstration, on travaille dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, puis on utilise la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Pour $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on peut intégrer par parties :

$$\hat{v}(\omega) = \int v(x)e^{-ix\cdot\omega}d\lambda_x = \frac{1}{i\omega_k}\int \frac{\partial v}{\partial x_k}e^{-ix\cdot\omega}d\lambda_x$$

$$|\hat{v}(\omega)| \leqslant \frac{1}{|\omega_k|}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right\|_{L^1} \underset{|\omega_k|\to+\infty}{\to} 0$$

Par densité, pour $u \in L^1$, il existe v dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ arbitrairement proche.

Compte tenu de :

$$\hat{u}(\omega) = (\hat{u}(\omega) - \hat{v}(\omega)) + \hat{v}(\omega)$$

on a :

$$|\hat{u}(\omega)| \leqslant \|u - v\|_{L^1} + \frac{1}{|\omega_k|}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right\|_{L^1}$$

que l'on peut rendre aussi petit que souhaité pour $|\omega|$ suffisamment grand. ■

Définition 5.1 Co-transformation

On définit la co-transformation $\bar{\mathcal{F}}$ par :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}} : L^1 &\to B_0 \\ \hat{u} &\mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\omega)e^{+i\omega\cdot x}d\lambda_\omega \end{aligned} \tag{5.6}$$

Proposition 5.2. ***Translation et symétrie***

i. ***Translation :*** *pour* $h \in \mathbb{R}^d$: $f_h(x) = f(x-h)$, $\mathcal{F}(f_h) = e^{-ih\cdot\omega}\mathcal{F}(f)$.

ii. ***Déphasage :*** *pour* $h \in \mathbb{R}^d$: $\mathcal{F}(e^{-ih\cdot x}f) = \mathcal{F}(f)_{-h}$.

iii. ***Dilatation :*** *pour* $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(\frac{\omega}{a})$.

iv. ***Symétrie :*** $\check{f}(x) = f(-x)$, $\overline{\mathcal{F}(u)} = \bar{\mathcal{F}}(\bar{u})$, $\bar{\mathcal{F}}(\check{u}) = \mathcal{F}(u)$, $\overline{\check{\mathcal{F}}(u)} = \mathcal{F}(\bar{u})$.

Proposition 5.3. ***Formule d'échange***

Soient u et v dans L^1. *Alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}v d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} u\hat{v}d\lambda \tag{5.7}$$

Démonstration. $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\, v d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-ix\cdot\omega} d\lambda_x v(\omega) d\lambda_\omega$.

Or :

$$|u(x)e^{-ix\cdot\omega}v(\omega)| \leqslant |u(x)v(\omega)|$$

Comme $(x, \omega) \mapsto u(x)v(\omega)$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^d)^2$, on peut appliquer le théorème de Fubini et intégrer dans l'ordre de son choix :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} u(x)e^{-ix\cdot\omega}d\lambda_x v(\omega)d\lambda_\omega &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} v(\omega)e^{-ix\cdot\omega}d\lambda_\omega u(x)d\lambda_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{v}u d\lambda \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}v d\lambda \qquad (5.8)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u\hat{v} d\lambda \end{aligned}$$

■

Proposition 5.4. ***Dérivation de la transformée de Fourier d'une fonction***

Si $(x_j u) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors* $\hat{u}$ *est dérivable par rapport à* ω_j *et :*

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \omega_j} = -i\widehat{x_j u} \qquad (5.9)$$

Démonstration. On veut dériver $\int_{\mathbb{R}^d} u(x)e^{-ix\cdot\omega}d\lambda_x$ par rapport à ω_j.

Pour appliquer le corollaire du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il faut regarder si la dérivée partielle est intégrable, ce qui est bien le cas, puisque :

$$\left|\frac{\partial u(x)e^{-ix\cdot\omega}}{\partial\omega_j}\right| = |x_j u(x)|$$

On peut donc permuter intégration et dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial\omega_j}\int_{\mathbb{R}^d} u(x)e^{-ix\cdot\omega}d\lambda_x = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial u(x)e^{-ix\cdot\omega}}{\partial\omega_j}d\lambda_x = -i\int_{\mathbb{R}^d} x_j u(x)e^{-ix\cdot\omega}d\lambda_x$$

■

Proposition 5.5. ***Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur***

Pour tout multientier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ *de* $\mathbb{N}^d$ *tel que* $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \leqslant k$ *et* $(x^\alpha u) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d} u(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors,* $\hat{u} \in C^k$ *et :*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\mathcal{F}(u)}{\partial\omega^\alpha} = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha u) \qquad (5.10)$$

Proposition 5.6. ***Transformée de Fourier d'une dérivée***

Si $u \in C^1 \cap L^1$ *et* $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^1$, *alors :*

$$\omega_j\hat{u} \in L^\infty \qquad et \qquad i\omega_j\hat{u} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} \qquad (5.11)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. Il s'agit d'une intégration par parties :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-ix\cdot\omega} d\lambda_x = \left[u(x)e^{-ix\cdot\omega}\right]_{x_j\to-\infty}^{x_j\to+\infty} - \int_{\mathbb{R}^d} u(x)(-i\omega_j)e^{-ix\cdot\omega} d\lambda_x$$

Pour conclure, il faut montrer que le terme entre crochets est nul, on va donc montrer que $u(x) \underset{x_j\to\pm\infty}{\to} 0$.

u étant C^1 :

$$u(x) = u(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_d) + \int_0^{x_j} \frac{\partial u}{\partial y_j}(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_d) d\lambda_{y_j}$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in L^1$, sa limite quand $x_j \to +\infty$ existe.

u admet donc une limite en $\pm\infty$, et, comme $u \in L^1$, cette limite doit être nulle.

Par suite, $u \underset{x_j\to\pm\infty}{\to} 0$, le terme entre crochets est nul et donc : $\widehat{\dfrac{\partial u}{\partial x_j}} = i\omega_j \hat{u}(\omega)$ ■

Proposition 5.7. ***Généralisation***

Si $u \in C^k$, alors, pour tout multientier β *de* $\mathbb{N}^d$ *tel que* $|\beta| = \sum_{i=1}^{d} \beta_i \leqslant k$ *:*

$$\omega^\beta \mathcal{F}(u) \in L^\infty \qquad et \qquad i^{|\beta|}\omega^\beta \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x^\beta}\right) \tag{5.12}$$

Théorème 5.8. ***(Dirichlet) Inversion de la transformée de Fourier***

Si f et $\hat{f}$ sont dans L^1, alors :

$$f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^d}\bar{\mathcal{F}}\hat{f} \tag{5.13}$$

Démonstration. Ce résultat sera démontré dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans la prochaine section. L'extension à L^1 se fait par densité en exploitant la continuité de $\mathcal{F}$. ■

Corollaire 5.9. ***Injectivité dans L^1***

Étant donné que $0 \in L^1$, si $\hat{f} = \hat{g}$ alors $\widehat{f-g} = 0$ et $f - g = 0$.
La transformée de Fourier est donc injective dans L^1.

Proposition 5.10. ***Transformée de Fourier et convolution***

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions f et g de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est égale au produit des deux transformées de Fourier

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g} \tag{5.14}$$

Démonstration. Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}^d)^2$. En reprenant la démonstation de l'inégalité de Young (C.17), on voit que la quantité $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^d)^2$, propriété inchangée par la multiplication par une exponentielle complexe, on peut donc appliquer le théorème de Fubini dans l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{f * g} &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)d\lambda_y d\lambda_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\omega} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x-y)\cdot\omega} f(x-y)g(y)d\lambda_x d\lambda_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\omega} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iz\cdot\omega} f(z)d\lambda_z g(y)d\lambda_y = \hat{f}\hat{g}\end{aligned}$$

5.1.2 Transformation sur les fonctions à décroissance rapide

On voit que L^1 donne un cadre général pour définir les calculs, mais pose problème, puisqu'il n'est pas stable par transformée de Fourier. On préfère travailler sur d'autres espaces, « plus petits » (mais qui héritent de toutes les propriétés précédentes).

Théorème 5.11. *La transformée de Fourier est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Voir l'exercice corrigé 5.1. ■

Remarque 5.1

Dans cet espace, toutes les hypothèses des théorèmes (dérivabilité, multiplicabilité par un polynôme) sont automatiquement vérifiées.
La stabilité par multiplication permet même d'obtenir une relation donnant la transformée d'un produit, égale au produit de convolution des transformées.

Notation

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^d)$ on peut appliquer le *produit scalaire* L^2 (noté $(\cdot,\cdot)_{L^2}$) à des fonctions de $\mathcal{S}$:

$$\forall (f, g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^2 : (f, g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g}d\lambda \tag{5.15}$$

Théorème 5.12. ***Formules de Parseval[†] et de Plancherel[‡]***
Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors :

$$(f, g)_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\hat{f}, \hat{g}\right)_{L^2} \tag{5.16}$$

†. Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836), mathématicien français. Il a apporté des contributions à l'étude des équations différentielles linéaires, à l'intégration, et, bien sûr, aux séries de Fourier.
‡. Michel Plancherel (1885-1967), mathématicien suisse, spécialiste d'analyse harmonique, de physique mathématique, mais aussi algébriste.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

et :

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left\|\hat{f}\right\| \tag{5.17}$$

Démonstration. On utilise la proposition 5.3, avec $\bar{g} = \hat{h}$ (que l'on peut trouver grâce à l'automorphisme), qui conduit, grâce au théorème 5.8 et à la proposition 5.2, à :

$$h = \frac{1}{(2\pi)^d}\bar{\hat{g}}$$

On a alors :

$$(f,g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g}d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f\hat{h}d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}hd\lambda = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}\bar{\hat{g}}d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\hat{f},\hat{g}\right)_{L^2}$$

■

Remarque 5.2

La formule précédente montre que la transformation de Fourier est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même quand on munit l'espace de la topologie induite par celle de $L^2(\mathbb{R}^d)$. C'est même une *isométrie* (au facteur $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$ près).

Remarque 5.3

Il est possible d'utiliser une *définition alternative* de la transformée de Fourier, afin d'obtenir une isométrie (sans facteur correcteur), et pour laquelle la formule d'inversion est symétrique ($\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$) :

$$\mathcal{F}^{alternative_1}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)e^{-2i\pi\omega\cdot x}dx \tag{5.18}$$

ou bien :

$$\mathcal{F}^{alternative_2}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} u(x)e^{-i\omega\cdot x}dx \tag{5.19}$$

Toutefois, ces définitions modifient les résultats existants (typiquement, un facteur apparaît dans la transformée d'un produit de convolution).

5.1.3 Transformée de Fourier-Plancherel

La densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et la continuité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ permettent de prolonger $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ étant inclus dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, la définition de la transformée de Fourier est encore valide. Mais, comme $L^2(\mathbb{R}^d)$ n'est pas strictement inclus dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, il existe des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour lesquelles la formule (5.2) n'a pas de sens.

Typiquement, $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^{1/3}}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

La démarche de construction de la transformée de Fourier consiste à montrer que l'on peut définir une fonction $f \in L^2$ comme la limite (en norme L^2) d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1 \cap L^2$ (typiquement $f_n = f\chi_{[-n,n]}$). On montre alors que, pour tout entier naturel n, $\hat{f}_n$ converge (dans L^2) et on définit la transformée de Fourier de f comme la limite de cette suite, ce qui, au final, revient à définir :

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} e^{-i\omega.x} f(x)dx \tag{5.20}$$

Si f est absolument intégrable, on retrouve alors une expression qui ressemble beaucoup à une intégrale de Riemann. Par abus, on s'autorise fréquemment à utiliser la notation (5.2).

5.1.4 Transformée de Fourier des distributions

Étant donnée la propriété d'isomorphisme de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'espace le plus naturel pour définir les transformées de Fourier de distributions est l'espace des distributions tempérées (à l'instar de L^1, $\mathcal{D}$ n'est pas stable par transformation de Fourier).

Notation

Pour $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on pose :

$$\langle \hat{S}, \phi \rangle = \langle S, \hat{\phi} \rangle \tag{5.21}$$

Remarque 5.4

Naturellement, si S s'identifie à une fonction f, alors : $\hat{S} = \hat{f}$.

Proposition 5.13. *$\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'$. Les formules sur le déphasage, la translation, la dérivation, sont encore valides sur $\mathcal{S}'$.*

Proposition 5.14. ***Cas des distributions à support compact***

Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors, $\hat{T}$ est une fonction C^∞ et :

i. $\hat{T}(\omega) = \langle T, e^{-i\omega.x} \rangle$

ii. $\dfrac{\partial \hat{T}(\omega)}{\partial \omega_k} = \langle (-ix_k)T, e^{-i\omega.x} \rangle$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Exemple 5.1

i. $\bar{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{F}(\delta) = 1$: la transformée de Fourier transforme l'élément neutre de la convolution en l'élément neutre de la multiplication.

ii. Dans $\mathbb{R}$ (i.e. en dimension 1), posons : $\mathcal{F}(1) = S$. Alors :

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}1\right) = \mathcal{F}(0) = 0 = i\omega\mathcal{F}(1)$$

Par suite : $\omega S = 0$ et $S = c\delta$ (cf exercice 4.3).
Il en résulte :

$$\langle \mathcal{F}(1), e^{-x^2/2}\rangle = \langle c\delta, e^{-x^2/2}\rangle = c$$

$$= \langle 1, \mathcal{F}(e^{-x^2/2})\rangle = \langle 1, \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}\rangle = \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\omega^2/2}d\lambda = 2\pi$$

Ainsi† :

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta$$

iii. Dans $\mathbb{R}^d$: $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^d\delta$.

Remarque 5.5

Le calcul de la transformée de Fourier d'une convolution de distributions peut poser quelques difficultés (on n'est pas assuré que la convolution de deux distributions tempérées existe, il faut un support convolutif). Quand tout est bien défini, la transformée de Fourier transforme le produit de convolution en multiplication et la multiplication en produit de convolution.

5.2 Transformation de Laplace

Le problème majeur de la transformation de Fourier est qu'elle ne fonctionne simplement que dans $\mathcal{S}$ (ou $\mathcal{S}'$). Si la dépendance en espace conduit souvent à des fonctions dans $\mathcal{S}$, ce n'est pas le cas du temps où on rencontre fréquemment des phénomènes à croissance exponentielle.

L'idée est alors de multiplier la fonction à étudier par une exponentielle décroissante en temps, de manière à ramener le problème dans $\mathcal{S}$ et pouvoir y appliquer la transformée de Fourier.

Si la transformée de Fourier fonctionne bien sur des grandeurs vectorielles (donc dans un espace à n dimensions), la transformée de Laplace s'applique principalement à des fonctions d'une variable scalaire (le temps).

D'autre part, la transformée de Laplace s'applique à des problèmes dont l'état est connu pour $t \leqslant 0$ (c'est l'hypothèse de causalité).

†. L'utilisation d'une des définitions alternatives de la transformée de Fourier symétrique donnerait 1 au lieu de 2π.

On considère donc systématiquement $u(t) = 0$ pour $t < 0$, et on travaille sur des fonctions, ou des distributions, dont le support est limité à gauche ($\mathcal{D}_+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$).

Il est fondamental de noter que la convolution est bien définie dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ (qui forme pour la convolution une algèbre commutative d'élément unité δ).

5.2.1 Définitions

Notation

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit *l'intervalle d'existence de la transformée de Laplace de T* par :

$$I_T = \left\{\xi \in \mathbb{R},\ e^{-\xi t}T \in \mathcal{S}'\right\} \tag{5.22}$$

Proposition 5.15.

i. *I_T est un convexe de $\mathbb{R}$ (un intervalle) qui peut être vide.*

ii. *Si $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, I_T est soit vide, soit de la forme $[\xi_0, +\infty[$ ou $]\xi_0, +\infty[$ avec $\xi_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

Démonstration.

i. Soit $(\xi_1, \xi_2) \in I_T^2$. Il faut montrer que, pour $\theta \in]0, 1[$:

$$\xi = \theta\xi_1 + (1-\theta)\xi_2 \in I_T$$

Posons : $\mu(t) = \dfrac{e^{-\xi t}}{e^{-\xi_1 t} + e^{-\xi_2 t}}$.

μ est infiniment dérivable, à valeurs dans [0, 1] et à variations lentes.

$$e^{-\xi t}T = \mu(t)e^{-\xi_1 t}T + \mu(t)e^{-\xi_2 t}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

ii. Dans le cas où $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, on considère $\xi_1 < \xi$, et on pose :

$$\widetilde{\mu}(t) = \psi(t)e^{-(\xi-\xi_1)t}$$

où ψ est une fonction C^∞ à support limité à gauche, qui vaut 1 sur un voisinage de supp(T). ■

Remarque 5.6

i. Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors $I_T = \mathbb{R}$.

ii. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, alors $0 \in I_T$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Exemple 5.2

Si $f(t) = e^{-t^2}$, alors $I_f = \mathbb{R}$, mais si $f(t) = e^{t^2}$ alors $I_f = \emptyset$.

Définition 5.2

La *transformée de Laplace* d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est définie, pour $\xi \in \mathring{I}_T$, et $p = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$, par

$$\mathcal{L}(T)(p) = \mathcal{F}(e^{-\xi t}T)(\eta) \tag{5.23}$$

Exemple 5.3 Transformée de Laplace de la distribution de Dirac

Compte tenu de $I_\delta = \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(\delta)(\xi + i\eta) = \mathcal{F}(e^{-\xi t}\delta)(\eta) = \mathcal{F}(\delta)(\eta) = 1 \tag{5.24}$$

Proposition 5.16. *On admet le résultat de régularité suivant :*
pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(T)$ est une fonction complexe de la variable complexe p, holomorphe dans $\mathring{I}_T + i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ †.

Définition 5.3

On appelle ***abscisse d'existence*** de $\mathcal{L}(T)$ la borne inférieure de I_T : $\xi_0 = \inf(I_T)$.

Proposition 5.17.

i. Injectivité : $\mathcal{L}(T_1) = \mathcal{L}(T_2)$ sur $I_{T_1} \cap I_{T_2}$ implique $T_1 = T_2$

ii. Dérivation : si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors $\dfrac{d^k}{dp^k}\mathcal{L}(T) = (-1)^k\mathcal{L}(t^kT)$

Démonstration.

i. L'injectivité de la transformée de Laplace est une conséquence de celle de la transformée de Fourier sur les distributions tempérées.

ii. La dérivation est à prendre au sens de $\mathbb{C}$ (on utilise à cet effet le changement de variable $(\xi, \eta) \to (p, \bar{p})$, qui conduit à $\partial_p = \dfrac{1}{2}(\partial_\xi - i\partial_\eta)$). Le calcul utilise la dérivation sous le signe intégral et les formules de la dérivée d'une transformée de Fourier. ■

†. L'holomorphie est une extension de la notion de dérivabilité aux fonctions de la variable complexe. Cette condition est beaucoup plus forte que la dérivabilité dans $\mathbb{R}$, puisqu'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est *analytique*, i.e. indéfiniment dérivable et égale au voisinage de tout point de l'ouvert à la somme de sa série de Taylor.

Remarque 5.7

Dans le cas de fonctions, par exemple, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $f(t < 0) \underset{pp}{=} 0$, on peut interpréter la transformée de Laplace comme le prolongement analytique de la transformée de Fourier de f (définie sur l'axe imaginaire) au demi-plan $\xi > \xi_0$.
L'abscisse d'existence ξ_0 est alors définie comme la borne inférieure de l'ensemble des ξ rendant $e^{-\xi t} f(t)$ à croissance lente (i.e. bornée par un polynôme) (ce qui revient à dire que $e^{-\xi t} f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$).
On a alors :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) e^{-pt} dt \tag{5.25}$$

5.2.2 Propriétés

Dans ce qui suit, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ désigne une distribution. On se place sur $\mathring{I}_T$ supposé non vide.

Proposition 5.18. ***Transformée de Laplace de la dérivée d'une distribution***

Soit T' la dérivée par rapport au temps de la distribution T. Alors : $I_T \subset I_{T'}$, et, pour $\xi \in \mathring{I}_T$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T')(p) &= p\,\mathcal{L}(T)(p) \\ \mathcal{L}(T^{(k)})(p) &= p^k\,\mathcal{L}(T)(p), \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Démonstration. $e^{-\xi t} T' = (e^{-\xi t} T)' + \xi e^{-\xi t} T$ donc $e^{-\xi t} T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si $\xi \in \mathring{I}_T$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T')(p) &= \mathcal{F}(e^{-\xi t} T')(\eta) = \mathcal{F}((e^{-\xi t} T)')(\eta) + \xi\,\mathcal{L}(T)(p) \\ &= i\eta\,\mathcal{F}(e^{-\xi t} T)(\eta) + \xi\,\mathcal{L}(T)(p) = p\,\mathcal{L}(T)(p) \end{aligned} \tag{5.27}$$

■

Remarque 5.8 Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction

En utilisant la distribution T_f associée à une fonction f (causale, dérivable sur $\mathbb{R}^+$), sachant que $(T_f)' = T_{f'} + [\![f]\!](0)\delta$ et que $f(0^-) = 0$ par hypothèse de causalité, on retrouve la formule de la transformée de la dérivée d'une fonction :

$$\mathcal{L}(T_{f'}) = \mathcal{L}((T_f)') - [\![f]\!](0)\mathcal{L}(\delta) \tag{5.28}$$

soit :

$$\mathcal{L}(f') = p\mathcal{L}(f) - f(0^+) \tag{5.29}$$

Proposition 5.19. ***Translation, déphasage, dilatation***

i. ***Translation :*** *pour $h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(T_h)(p) = e^{-ph}\mathcal{L}(T)(p)$.*

ii. ***Déphasage :*** *pour $h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(e^{ht}T) = \mathcal{L}(T)_h$.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

iii. ***Dilatation :*** *pour* $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{|a|}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right)$.

Démonstration.

On a $e^{-\xi t}T_h = e^{-\xi h}(e^{-\xi t}T)_h$ et donc en utilisant la translation dans Fourier, $\mathcal{L}(T_h)(p) = e^{-\xi h}\mathcal{F}((e^{-\xi t}T)_h)(\eta) = e^{-(\xi+i\eta)h}\mathcal{F}(e^{-\xi t}T)(\eta)$ ■

Théorème 5.20. ***Transformée de Laplace d'un produit de convolution***

i. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *et* $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. *Alors :*

$$I_T \subset I_{T*S} \tag{5.30}$$

et, pour $\mathrm{Re}(p) \in \mathring{I}_T$ *:*

$$\mathcal{L}(T * S)(p) = \mathcal{L}(T)(p).\mathcal{L}(S)(p) \tag{5.31}$$

ii. Soit $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ *et* $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. *Alors :*

$$I_T \cap I_S \subset I_{T*S} \tag{5.32}$$

et, pour $\mathrm{Re}(p) \in \mathring{I}_T \cap \mathring{I}_S$ *:*

$$\mathcal{L}(T * S)(p) = \mathcal{L}(T)(p).\mathcal{L}(S)(p) \tag{5.33}$$

Démonstration. On ne démontre que le premier résultat.

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$: $I_S = \mathbb{R}$.

Ainsi, si on se place sur I_T : $e^{-\xi t}T$ est tempérée et $e^{-\xi t}S$ est à support compact.

On peut alors définir $e^{-\xi t}T * e^{-\xi t}S$, qui est une distribution tempérée, et :

$$e^{-\xi t}T * e^{-\xi t}S = e^{-\xi t}(T * S)$$

ce qui conduit à : $I_T \subset I_{T*S}$.

Le reste découle des propriétés de la transformée de Fourier. ■

Lemme 5.21. *Soit* $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. *Alors :*

$$\mathcal{L}(T)(p) = \langle T, e^{-pt}\rangle \tag{5.34}$$

La notation est à prendre avec précaution puisque e^{-pt} *n'est pas dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, *il faut comprendre*

$$\langle T, e^{-pt}\rangle = \langle e^{-\xi_1 t}T, e^{-(p-\xi_1)t}\psi\rangle \tag{5.35}$$

où $\psi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ *est égale à 1 sur un voisinage de* $\mathrm{supp}(T)$, *et* ξ_1 *rend le terme de gauche dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *et celui de droite dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *le crochet est celui de la dualité entre* $\mathcal{S}'$ *et* $\mathcal{S}$.

Théorème 5.22. *Valeur initiale*

Pour une fonction f causale dérivable dont la dérivée est intégrable sur $\mathbb{R}^+$:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{\xi\to+\infty} \xi\,\mathcal{L}(f)(\xi) \tag{5.36}$$

Théorème 5.23. *Valeur finale*

Pour une fonction f causale dérivable dont la dérivée est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, qui admet une limite en $+\infty$[†] :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\,\mathcal{L}(f)(p) \tag{5.37}$$

Démonstration. Sachant que

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = p\,\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

et que l'on est dans les hypothèses du théorème de Lebesgue pour permuter limite et intégrale, alors :

i. pour $p \to 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\,e^{-pt}dt \to \int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0^+)$$

ii. pour $p \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\,e^{-pt}dt \to 0$$ ■

On donne une seconde démonstration du théorème de la valeur finale qui ne requiert pas la dérivabilité de la fonction.

Démonstration. On pose :

$$\ell = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la définition de la limite, il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall\, t > A, \quad |\ell - f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

†. Remarquons que pour que la fonction ait une limite en $+\infty$, 0 doit nécessairement appartenir à l'intervalle d'existence et il faut que les pôles de la transformée de Laplace soient tous strictement négatifs ou éventuellement de partie réelle nulle mais non conjugués.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Comme $\int_0^{\infty} pe^{-pt}dt = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|\ell - p\mathcal{L}(f)(p)| &= \left|\ell - \int_0^{+\infty} p\,e^{-pt} f(t)\,dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} (\ell - f(t))\; p\,e^{-pt}\,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^{A} |\ell - f(t)|\, p\,e^{-pt}\,dt + \int_A^{+\infty} |\ell - f(t)|\, p\,e^{-pt}\,dt \\
&\leqslant 2\|f\|_\infty \int_0^{A} p\,e^{-pt}\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_\eta^{+\infty} p\,e^{-pt}\,dt \\
&\leqslant 2\|f\|_\infty (1 - e^{-pA}) + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

A étant fixé :

$$\lim_{p\to+\infty}(1 - e^{-pA}) = 0 \implies \exists p_0 > 0,\ 1 - e^{-p\eta} \leqslant \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} \quad \forall \mathrm{Re}(p) \in [0, p_0]$$

Par suite, pour $\mathrm{Re}(p) \in [0, p_0]$:

$$|\ell - p\mathcal{L}(f)(p)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ ■

Exemple 5.4

Le théorème permet d'affirmer que la fonction dont la transformée vaut $\dfrac{1}{p(p+2)}$ a pour valeur finale $\dfrac{1}{2}$.

Par contre, il ne s'applique pas à la fonction dont la transformée vaut $\dfrac{1}{p(p-2)}$, puisque le pôle en $p = 2$ implique que la fonction tend vers l'infini en $t \to +\infty$ (même si la limite en 0 de la transformée multipliée par p existe).

5.2.3 Inversion

La question que l'on se pose ici est, connaissant une fonction holomorphe dans une bande de $\mathbb{C}$, à quelle condition est-elle la transformée de Laplace d'une fonction (conditions de comportement à l'infini) ? Les formules pratiques de transformée inverse font appel à des propriétés des fonctions complexes de la variable complexe non abordées ici. En pratique, pour inverser une transformée de Laplace, on identifie des fonctions connues (en général des fractions rationnelles réduites en éléments simples).

Définition 5.4

Étant donnée une fonction G de la variable complexe p, on appelle ***original*** de G la fonction g telle que

$$G = \mathcal{L}(g) \tag{5.38}$$

Théorème 5.24. *Dans ce qui suit, G désigne une fonction holomorphe que l'on étudie sur son domaine d'holomorphie (bande parallèle à l'axe imaginaire).*

i. Si, pour tout p du domaine d'holomorphie de G : $|G(p)| \leqslant \dfrac{Ce^{-\mathrm{Re}(p)\alpha}}{|p|^2}$, alors, l'original g est continu et à support dans $[\alpha, +\infty[$.

ii. S'il existe une fonction polynomiale φ_{pol} de la variable p telle que, pour tout p du domaine d'holomorphie de G :

$$|G(p)| \leqslant e^{-\mathrm{Re}(p)\alpha}\varphi_{pol}(|p|)$$

alors, l'original g est dans L_+, et à support dans $[\alpha, +\infty[$.

iii. S'il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout entier naturel n, il existe une constante positive C_n telle que, pour tout p du domaine d'holomorphie de G :

$$|G(p)| \leqslant \frac{C_n\, e^{|\mathrm{Re}(p)|\alpha}}{(1+|p|)^n}$$

alors, l'original g appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et est à support dans $[-\alpha, \alpha[$.

iv. S'il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout entier naturel n et tout p du domaine d'holomorphie de G :

$$|G(p)| \leqslant C(1+|p|)^n\, e^{|\mathrm{Re}(p)|\alpha}$$

alors, l'original g appartient à $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et est à support dans $[-\alpha, \alpha[$.

On donne une formule d'inversion à titre indicatif. En pratique, on se ramène à des transformées inverses de fonctions connues.

Théorème 5.25. *Pour une fonction f continue, causale, à support compact, telle que :*

$$t \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{\omega}\mathcal{L}(f)(i\omega) \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\text{on a} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\mathcal{L}(f)(i\omega)d\omega \tag{5.39}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Remarque 5.9 Rappels sur la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Une fraction rationnelle R est le quotient de deux polynômes P et Q :

$$R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \tag{5.40}$$

Désignons par n_P le degré de P, et par n_Q celui de Q. On exclut le cas où la fraction rationnelle R possède une partie entière, en supposant $n_P < n_Q$.

Premier cas : décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ étant un corps algébriquement clos, le polynôme Q possède exactement n_Q racines complexes $z_1, \ldots, z_{n_Q}$, non nécessairement distinctes.

Si on désigne par $k_Q \leqslant n_Q$ le nombre de racines distinctes de Q, et, pour tout i de $\{1, \ldots, k_Q\}$, par α_i la multiplicité de la racine z_i :

$$\forall z \in \mathbb{C} : Q(z) = \prod_{i=1}^{n_Q} (z - z_i) = \prod_{i=1}^{k_Q} (z - z_i)^{\alpha_i} \tag{5.41}$$

La décomposition en éléments simples de $R(z)$ dans $\mathbb{C}$ est de la forme :

$$R(z) = \sum_{i=1}^{k_Q} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ij}}{(z - z_i)^j} \tag{5.42}$$

où les C_{ij} sont des constantes à valeurs dans le corps $\mathbb{C}$.

Deuxième cas : décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

Désignons par $k_Q \leqslant n_P$ le nombre de racines distinctes de Q, et, pour tout i de $\{1, \ldots, k_Q\}$, par α_i la multiplicité de la racine x_i ; Q se factorise sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R} : Q(x) = \prod_{i=1}^{k_Q} \prod_{j=1}^{l_Q} (x - x_i)^{\alpha_i} (a_j x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j} \tag{5.43}$$

où les $(a_j x^2 + b_j x + c_j)$, $j = 1, \ldots, l_Q$, sont des polynômes irréductibles de degré 2, qui apparaissent avec la multiplicité β_j lorsque l'on factorise Q.

La décomposition en éléments simples de $R(x)$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$R(x) = \sum_{i=1}^{k_Q} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{l_Q} \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{D_{ij} x + E_{ij}}{(a_i x^2 + b_i x + c_i)^j} \tag{5.44}$$

où les C_{ij}, D_{ij}, E_{ij} sont des constantes à valeurs dans le corps $\mathbb{R}$.

5.2.4 Formulaire

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(p)$
$H(t)$	$\frac{1}{p}$ $p > 0$
$tH(t)$	$\frac{1}{p^2}$ $p > 0$
$t^n H(t)$ $n > 0$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$ $p > 0$
$\frac{1}{\sqrt{t}} H(t)$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ $p > 0$
$e^{-at} H(t)$	$\frac{1}{p+a}$ $p > -a$
$t^n e^{-at} H(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$ $p > -a$
$\cos(bt)H(t)$	$\frac{p}{p^2+b^2}$ $p > 0$
$\sin(bt)H(t)$	$\frac{b}{p^2+b^2}$ $p > 0$
$e^{-at}\cos(bt)H(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$ $p > -a$
$e^{-at}\sin(bt)H(t)$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$ $p > -a$

(5.45)

Exercices

5.1 Inversibilité de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

L'objectif de cet exercice est de montrer que la transformation de Fourier est un automorphisme (application linéaire bijective d'un espace sur lui-même) de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, espace des fonctions à décroissance rapide (espace de Schwarz).

1. Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   Montrer que φ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \sqrt{2\pi}$
3. Montrer que φ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire que sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ vérifie une équation différentielle à préciser, puis que $\hat{\varphi}$ est égale à $\sqrt{2\pi}\varphi$.
4. Soit la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$, on considère les intégrales :

$$I_n(a) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\varphi_n(\lambda)e^{ia\lambda}d\lambda, \qquad \text{et} \qquad J_n(a) = \int_{\mathbb{R}} f(a+x)\hat{\varphi}_n(x)dx$$

Montrer que $I_n(a)$ et $J_n(a)$ existent, et que : $I_n(a) = J_n(a)$.

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\hat{\varphi}_n(\lambda) = n\hat{\varphi}(n\lambda)$$

et en déduire que $J_n(a) = \int_{\mathbb{R}} f(a + \frac{\xi}{n})\hat{\varphi}(\xi)d\xi$.
En appliquant le théorème de Lebesgue C.6, montrer alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 2\pi f(a)$$

6. Montrer par utilisation du théorème de Lebesgue que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = (\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(a)$$

En déduire la formule de réciprocité sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de la transformée de Fourier.

5.2 Équation de la chaleur unidimensionnelle

On considère le problème suivant posé sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

constitué de l'équation de la chaleur unidimensionnelle, assortie d'une condition initiale.

1. Donner l'équation satisfaite par la transformée partielle :

$$(t,y) \mapsto \hat{u}(t,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}u(t,x)dx$$

2. Déterminer, pour tout (t,y), l'expression de $\hat{u}(t,y)$, et en déduire celle de $u(t,x)$ pour tout (t,x).

5.3 Lien entre transformée et série de Fourier

Dans cet exercice, on considère des fonctions de la variable réelle, à valeur dans $\mathbb{C}$.

T étant un réel strictement positif, une fonction f sur $\mathbb{R}$ est dite T-périodique si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ f(x+T) = f(x)$$

On désigne par $f_T = f_{|[0,T]}$ la restriction de f à $[0,T]$, appelée aussi *motif de la fonction*.

On suppose que $f^T \in L^2([0,T])$, et on désigne par $L^2_T(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions T-périodiques dont la restriction à une période est de carré intégrable.

On rappelle l'expression des coefficients de Fourier exponentiels de f :

$$\hat{f}_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{[0,T]} f(x) e^{-\frac{2i\pi nx}{T}} dx \qquad \text{et} \qquad S_f = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{\frac{2i\pi nx}{T}}$$

La série de Fourier S_f, donnée par :

$$S_f = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{\frac{2i\pi nx}{T}}$$

converge vers f dans $L^2_T(\mathbb{R})$.

Si f est de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisée de f :

$$S_f(x) \to \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Si, de plus, f est continue, la convergence est normale.

1. Résultats préliminaires
   (a) Montrer que $L^2([0,T]) \subset L^1([0,T])$.
   (b) Montrer que $\left(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2i\pi nt}{T}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de fonctions de $L^2_T(\mathbb{R})$, puis la relier à un problème de Sturm-Liouville† et en déduire qu'elle constitue une base hilbertienne de $L^2_T(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer qu'une fonction périodique non nulle et bornée f ne peut pas appartenir à $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ ni $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais, par contre, qu'elle peut être interprétée comme une distribution tempérée ($f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$).
   (d) Montrer que $\mathcal{F}(\delta_a)$ est la distribution associée à $x \mapsto e^{-iax}$ et que :

$$\mathcal{F}(e^{ia\omega}) = 2\pi\delta_a$$

   (e) Déterminer la transformée de Fourier d'une fonction périodique en identifiant la fonction à sa série de Fourier.
2. On définit la distribution « peigne de Dirac » (ou distribution de Poisson) par :

$$\text{Ш}_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT}$$

   (a) Montrer que Ш_T est une distribution tempérée.

†. Les problèmes de Sturm-Liouville sont abordés dans le chapitre suivant.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

(b) Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose : $P_T^\phi(x) = \sum_n^{\mathbb{Z}} \phi(x + nT)$.

Montrer que $P_T^\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que P_T^ϕ est T-périodique.

(c) Déduire du développement en série de Fourier de $P_T^\phi(x)$ que :

$$P_T^\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}\left(\frac{2n\pi}{T}\right) e^{\frac{2in\pi t}{T}}$$

(d) En déduire que $\mathcal{F}(\text{Ш}_T) = 2\pi\text{Ш}_{\frac{2\pi}{T}}$.

(e) Retrouver le lien entre série et transformée de Fourier en montrant que :

$$f = f_T * \text{Ш}_T$$

3. Application : déterminer la figure de diffraction ψ d'un réseau unidimensionnel de fentes rectangulaires.

On rappelle :

$$\psi(y) = \psi_0 \int t(X) e^{-\frac{2i\pi}{\lambda L} Xy} dX \tag{5.46}$$

où ψ_0 est le module de l'onde incidente, λ est la longueur d'onde, L la distance à l'écran ; X parcourt le réseau, et y parcourt l'écran.

t est le facteur de transmission du réseau, on suppose que celui-ci est constitué de fentes de largeur $2l$ séparées de d et donc que :

$$t(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_{[nd-l,nd+l]}$$

5.4 Principe d'incertitude d'Heisenberg

Cet exercice a pour but de démontrer une formule proche du principe d'incertitude d'Heisenberg.†

On va montrer que le produit de la variance d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par la variance de sa transformée de Fourier est nécessairement plus grand qu'une constante, ce que l'on peut traduire par le fait qu'une fonction brève en temps (petite variance) a nécessairement un spectre de Fourier étalé (et vice-versa).

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$2\int_{\mathbb{R}} t\phi'(t)\phi(t)dt = -\int_{\mathbb{R}} \phi^2(t)dt$$

†. Werner Karl Heisenberg (1901-1976), physicien allemand. Il fut l'un des fondateurs de la mécanique quantique, ce qui lui valut, en 1932, le prix Nobel de physique.

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'égalité de Plancherel, montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \left|t^2\phi(t)^2\right| dt \int_{\mathbb{R}} \left|\omega^2\widehat{\phi}^2(\omega)\right| d\omega \geqslant \frac{\pi}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\phi^2(t)\right| dt\right)^2$$

3. Montrer que l'égalité est atteinte pour la *fonction gaussienne* :

$$t \mapsto \psi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

On rappelle que les résultats suivant sur la gaussienne :

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$$

5.5 Système d'ODE par transformée de Laplace

On considère le système masses-ressorts-amortisseur de la figure 5.1.

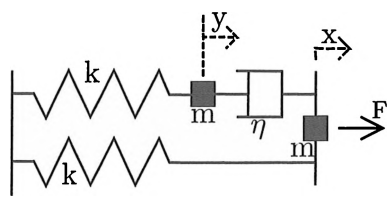


Figure 5.1 - Système masses-ressorts-amortisseur

Il est régi par le système différentiel :

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -ky + \eta(\dot{x} - \dot{y}) \\ m\ddot{x} = -kx + \eta(\dot{y} - \dot{x}) + f \end{cases}$$

où x et y sont les fonctions inconnues du temps ($t \geqslant 0$), avec les conditions :

$$x(0) = -y(0) = \alpha, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$$

La fonction f, qui dépend du temps t, est supposée connue, tout comme le réel α et les constantes positives m, k, η.

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre le système différentiel.

On prendra $\eta = \sqrt{mk}$ et $f(t) = mF_0H(t)$ et on posera $\frac{k}{m} = \omega_0^2$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

5.6 Transformée de Laplace et équation des ondes

Soit c une constante réelle strictement positive.

Utiliser la transformée de Laplace pour déterminer la solution $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de l'équation des ondes unidimensionnelles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

qui satisfait les conditions :

$$\begin{cases} f(x,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 \\ f(0,t) = v(t)H(t), \qquad v \text{ fonction donnée} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x,t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

5.7 Transformée de Laplace et solution périodique

Cet exercice a pour but d'étudier la solution du problème des ondes de traction-compression dans une barre de longueur finie $L > 0$:

$$\forall (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

où $c > 0$ est la célérité, supposée constante.

On commence par deux questions préliminaires :

1. Soit f une fonction causale et pour $a > 0$, f_a la fonction retardée : $f_a(t) = f(t-a)$ pour $t > a$ et 0 pour $t < a$. Exprimer la transformée de Laplace de f_a en fonction de celle de f.
2. Soit f une fonction causale périodique sur $\mathbb{R}^+$, de période $T > 0$. On définit la fonction causale $\tilde{f}$ (extraction de la première période) :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) & \text{pour } t \in [0,T] \\ 0 & \text{pour } t > T \end{cases}$$

Montrer que :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \mathcal{L}(\tilde{f})$$

On revient au problème de la barre.

On considère les conditions initiales et limites suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{cases} f(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{cases} f(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(L,t) = mH(t) \end{cases}$$

où H est l'échelon de Heaviside. Autrement dit la barre est initialement au repos, le déplacement est nul à gauche et un effort d'intensité m est appliqué brutalement et maintenu en L.

Soit F la transformée de Laplace (en temps) de f. Soit $p \in \mathbb{C}$ la variable de Laplace, F est donc une fonction de x et p, typiquement

$$F(x, p) = \int_0^{+\infty} f(x, t)\, e^{-p\,t}\, dt$$

3. Montrer que F est solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO) en x paramétrée par p
4. Donner la solution générale de cette EDO en x, penser que les "constantes" peuvent dépendre de p.
5. Utiliser les conditions aux limites pour déterminer complètement F.
6. Par identification, déterminer la fonction f.
   On pourra exploiter la relation suivante :

$$\left(e^{-\frac{Lp}{c}} - e^{-3\frac{Lp}{c}}\right)\left(e^{\frac{Lp}{c}} + e^{-\frac{Lp}{c}}\right) = 1 - e^{-\frac{4Lp}{c}}$$

Pour aller plus loin

Des exercices supplémentaires corrigés sont en accès libre à partir des pages d'accueil du livre sur le site www.dunod.com

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Corrigés

5.1 1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : t \mapsto t^p f^{(j)}(t)$ est C^∞ et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Or : $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable, ce qui implique que $\hat{f}$ est n fois continûment dérivable. $\hat{f}$ est donc C^∞.

Par ailleurs :

$$\widehat{|f^{(n)}|} = |\lambda|^n |\hat{f}|$$

$$\widehat{|f^{(n)}|}(\lambda) = \left| \int f^{(n)}(t) e^{-i\lambda t}\, dt \right| \leqslant \int |f^{(n)}(t)|\, dt < \infty$$

Par suite :

$$|\hat{f}| \leqslant \frac{1}{|\lambda|^n} \int |f^{(n)}(t)| dt$$

ce qui garantit la décroissance rapide.

Le même raisonnement s'applique aux dérivées de $\hat{f}$, qui est donc bien dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. $x \mapsto \phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ est bien entendu C^∞. De plus :

$$\phi^{(k)}(x) = P(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

où P est un polynôme de degré k. Par conséquent :

$$|x^m \phi^{(k)}(x)| \sim e^{(m+k)\ln|x| - \frac{x^2}{2}} \leqslant e^{(m+k)(|x|-1) - \frac{x^2}{2}} \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

De plus, $(x, y) \mapsto e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^2$, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

3. ϕ vérifie l'équation différentielle :

$$\phi'(x) + x\phi(x) = 0$$

Or, sachant que $\widehat{\phi'}(\lambda) = i\lambda\hat{\phi}(\lambda)$ et $(\hat{\phi})' = -i(\widehat{x\phi})$, nous avons :

$$\lambda\hat{\phi} + \hat{\phi}' = 0$$

d'où :

$$\hat{\phi}(\lambda) = ae^{-\lambda^2/2}$$

De plus, $\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = \sqrt{2\pi}$, d'où $a = \sqrt{2\pi}$, et $\hat{\phi} = \sqrt{2\pi}\phi$.

4. $I_n(a)$ et $J_n(a)$ existent car f, ϕ_n, $\hat{f}$ et $\hat{\phi}_n$ sont toutes dans $\mathcal{S}$. De plus :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda)e^{ia\lambda} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx e^{ia\lambda} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda(x-a)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X+a)e^{-i\lambda X}dX = \widehat{f(X+a)}(\lambda) \\
I_n(a) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f(X+a)}(\lambda)\phi_n(\lambda)d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)\hat{\phi}_n(x)dx = J_n(a)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_n(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2n^2}} e^{-i\lambda x}dx \quad ; \quad u = \frac{x}{n} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-i(\lambda n)u} n du = n\hat{\phi}(n\lambda) \\
J_n(a) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+a)\hat{\phi}_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)n\hat{\phi}(nx)dx \quad ; \quad x = \frac{v}{n} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(a+\frac{v}{n})\frac{n}{n}\hat{\phi}(v)dv
\end{aligned}$$

6. Le théorème de Lebesgue s'applique, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \; : \; |f(a+x)\hat{\phi}_n(x)| \leqslant |f(a+x)|$$

et $x \mapsto f(a+x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

De même :

$$|\hat{f}(y)\phi_n(y)e^{iay}| \leqslant |\hat{f}(y)|$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(a+x)\hat{\phi}_n(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f(a+x)\hat{\phi}_n(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f(a+\frac{v}{n})\hat{\phi}(v)dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(a)\hat{\phi}(v)dv = f(a)\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}dv = 2\pi f(a) \\
\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\phi_n(y)e^{iay}dy &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} \hat{f}(y)\phi_n(y)e^{iay}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{iay}dy = (\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(a)
\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = \lim_{n\to+\infty} J_n(a)$$

Par suite :

$$2\pi f(a) = (\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(a) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(a) \Rightarrow \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = 2\pi I_d \to \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$$

Le théorème de réciprocité sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en découle.

5.2 1. On applique simplement la transformée de Fourier à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + y^2\hat{u} = 0$$

2. En résolvant, pour y fixé, l'équation différentielle portant sur la fonction $t \mapsto \hat{u}(t, y)$, on obtient :

$$\hat{u}(t, y) = \hat{u}_0(y)e^{-y^2 t}$$

Il en résulte : $u(t, x) = u_0(x) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-y^2 t})$.

En utilisant le résultat de l'exercice précédent sur la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec la formule de dilatation, on obtient :

$$u(t, x) = u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

5.3 1. (a) On applique le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$\|f\|_{L^1([0,T])} = \int_0^T 1.|f(x)|dx \leqslant \sqrt{\int_0^T |f(x)|^2 dx}\sqrt{\int_0^T 1^2 dx} = T\|f\|_{L^2([0,T])}$$

Ainsi, si $f \in L^2([0, T])$:

$$\|f\|_{L^2([0,T])} < \infty$$

Il en résulte : $\|f\|_{L^1([0,T])} < \infty$ et $f \in L^1([0, T])$.

L'intérêt de cette question était de montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction L^2 ont bien un sens.

(b)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}}e^{in2\pi\frac{t}{T}}, \frac{1}{\sqrt{T}}e^{im2\pi\frac{t}{T}}\right)_{L^2[0,T]} = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}}e^{in2\pi\frac{t}{T}}\frac{1}{\sqrt{T}}e^{-im2\pi\frac{t}{T}}dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(n-m)2\pi\frac{t}{T}}$$

Ainsi, pour $m = n$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}}e^{in2\pi\frac{t}{T}}, \frac{1}{\sqrt{T}}e^{im2\pi\frac{t}{T}}\right)_{L^2[0,T]} = 1$$

et, pour $n \neq m$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}}e^{in2\pi\frac{t}{T}}, \frac{1}{\sqrt{T}}e^{im2\pi\frac{t}{T}}\right)_{L^2[0,T]} = \frac{1}{2i\pi(n-m)}\left[e^{i(n-m)2\pi\frac{t}{T}}\right]_0^T = 0$$

On considère le problème de Sturm-Liouville périodique :

$$(E) \qquad \frac{d^2f}{dt^2} + \lambda f = 0$$

$$(F) \qquad \begin{cases} f(0) = f(T) \\ \frac{df}{dt}(0) = \frac{df}{dt}(T) \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme :

$$t \mapsto Ae^{i\lambda t} + Be^{-i\lambda t} \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

Les conditions aux bords imposent :

$$\lambda = \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2$$

ce qui conduit à des valeurs propres doubles et des vecteurs propres de la forme $t \mapsto e^{\pm\frac{2i\pi nt}{T}}$, qui constituent une base hilbertienne.

(c) Si f est non nulle : $\int_0^T |f(x)|^p\,dx > 0$, et donc :

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \int_{nT}^{n(T+1)} |f(x)|^p dx = +\infty$$

Par suite : $f \notin L^p(\mathbb{R})$.

Bien sûr, une fonction périodique ne pouvant être à décroissance rapide :

$$f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Par contre, une fonction périodique (suffisamment régulière) peut être considérée comme une distribution tempérée. Typiquement, une fonction périodique bornée peut être majorée par un polynôme, ce qui est un critère pour appartenir à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(d)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\delta_a), \phi\rangle &= \langle \delta_a, \mathcal{F}(\phi)\rangle \\ &= \langle \delta_a, \int_{\mathbb{R}} \phi(x)e^{-ix\omega}dx\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x)e^{-ixa}dx = \langle e^{-ixa}, \phi\rangle \end{aligned}$$

Et :

$$\langle \mathcal{F}(e^{ia\omega}), \phi\rangle = \langle e^{-ia\omega}, \mathcal{F}(\phi)\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{ia\omega}\mathcal{F}(\phi)(\omega)d\omega = 2\pi\phi(a) = 2\pi\langle \delta_a, \phi\rangle$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

(e) Si f est périodique et suffisamment régulière, on l'identifie à sa série de Fourier :

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{\frac{2i\pi n}{T}}$$

En appliquant la transformée de Fourier, on en déduit :

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \delta_{\frac{2\pi n}{T}}$$

Autrement dit, la transformée de Fourier est une somme de Dirac (sur les points multiples de la pulsation) d'amplitude donnée par les coefficients de Fourier.

On parle de *spectre de raies*, caractéristique des phénomènes périodiques.

2. (a) Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors : $\langle \text{Ш}_T, \phi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(nT)$.

Comme ϕ est à décroissance rapide, on peut trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout entier n :

$$|\phi(nT)| \leqslant \frac{A}{(Tn)^2 + 1}$$

La série est donc bien convergente.

La linéarité est évidente.

Pour la continuité, soit une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\phi \in \mathcal{S}$, on a :

$$\|\phi - \phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0$$
$$\|(1 + x^2)(\phi - \phi_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0$$

il en résulte :

$$|\phi(kT) - \phi_n(kT)| \leqslant \frac{\|\phi - \phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{1 + (kT)^2}$$

puis :

$$\langle \text{Ш}_T, \phi - \phi_n \rangle \leqslant A\|\phi - \phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0$$

(b) La somme a un sens, puisque, à x fixé, on peut majorer le terme général de la série par un terme en $\frac{A}{(1+(nT)^2}$.

La périodicité est évidente.

Pour la continuité, la formule de Taylor donne, $\forall\, (x, y) \in [0, T]^2$:

$$|\phi(nT + x) - \phi(nT + y)| \leqslant \left|\phi'(nT + x) + \frac{(y - x)}{2}\|\phi''\|_{L^\infty([nT,(n+1)T])}\right| |y - x|$$

Le majorant tend vers 0 lorsque $(y - x) \to 0$.

On peut raisonner de même sur les dérivées.

(c)

$$\begin{aligned}(\hat{P}_T^{\phi})_n &= \int_0^T P_T^{\phi}(t) e^{-\frac{i2n\pi t}{T}} dt = \int_0^T \sum_k \phi(t+kT) e^{-\frac{i2n\pi t}{T}} dt \\ &= \sum_k \int_{kT}^{(k+1)T} \phi(t) e^{-\frac{i2n\pi t}{T}} dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\frac{i2n\pi t}{T}} dt \\ &= \hat{\phi}\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\end{aligned}$$

Par suite :

$$P_T^{\phi}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\hat{P}_T^{\phi})_n e^{\frac{2i\pi nt}{T}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}\left(\frac{2n\pi}{T}\right) e^{\frac{2i\pi nt}{T}}$$

(d) On a :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(t+kT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}\left(\frac{2n\pi}{T}\right) e^{\frac{2i\pi nt}{T}}$$

Par suite, pour $t = 0$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(kT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}\left(\frac{2n\pi}{T}\right)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\langle \text{Ш}_T, \phi\rangle &= \langle \text{Ш}_{\frac{2\pi}{T}}, \hat{\phi}\rangle \\ \langle \text{Ш}_T, \phi\rangle &= \langle \widehat{\text{Ш}_{\frac{2\pi}{T}}}, \phi\rangle \\ \text{Ш}_T &= \mathcal{F}(\text{Ш}_{\frac{2\pi}{T}}) \\ \mathcal{F}^{-1}(\text{Ш}_T) &= \text{Ш}_{\frac{2\pi}{T}}\end{aligned}$$

La parité de Ш conduit alors à :

$$\mathcal{F}(\text{Ш}) = \bar{\mathcal{F}}(\text{Ш})$$

et donc, finalement :

$$\mathcal{F}(\text{Ш}_T) = 2\pi \text{Ш}_{\frac{2\pi}{T}}$$

(e) La convolution avec un Dirac équivaut à la translation d'une fonction. Ici, on translate donc le motif une infinité de fois.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

En prolongeant f_T par 0 en dehors de $[0, T]$, on obtient :

$$\begin{aligned}(f_T * \text{Ш}_T)(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\delta_{nT} * f_T)(x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \delta_{nT}(y), f_T(x-y)\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \delta(y), f_T(x-(y+nT))\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_T(x-nT)\end{aligned}$$

On peut décomposer tout $x \in \mathbb{R}$ de manière unique sous la forme :

$$x = x_0 + kT, \qquad x_0 \in [0, T[,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi :

$$(f_T * \text{Ш}_T)(x_0 + kT) = f_T(x_0) = f(x_0)$$

et :

$$f = f_T * \text{Ш}_T$$

Par suite :

$$\hat{f} = 2\pi \widehat{f_T}.\text{Ш}_{2\pi/T}$$

La transformée de Fourier d'une fonction périodique est donc celle du motif dont on extrait (via le peigne) uniquement les valeurs à des fréquences qui sont multiples de la fréquence de base.

La valeur de la fonction en ces « pics » est égale aux coefficients de Fourier.

3. On a $t = \text{Ш}_d * \chi_{[-l,l]}$.

Le calcul de diffraction est un calcul de transformée de Fourier :

$$\psi(y) = \psi_0 \hat{t}\left(\frac{2\pi y}{\lambda L}\right)$$

Or :

$$\hat{t} = 2\pi \widehat{\chi_{[-l,l]}}.\text{Ш}_{2\pi/d}$$

Il reste donc à calculer la transformée de Fourier d'une fenêtre, qui fait apparaître un *sinus cardinal* :

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_{[-l,l]}} &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-l,l]}(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-l}^{l} e^{-i\omega x} dx = \int_{-l}^{l} \cos(-\omega x) + i \sin(-\omega x) dx \\ &= 2\int_{0}^{l} \cos(\omega x) dx = 2\frac{\sin(\omega l)}{\omega} = 2l\frac{\sin(\omega l)}{\omega l} \\ &= 2l\,\mathrm{sinc}(\omega l)\end{aligned}$$

5.4 1. Une intégration par parties conduit à :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi^2(t) dt = \left[t\phi^2(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} 2t\phi'(t)\phi(t) dt$$

Comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\left[t\phi^2(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

D'où le résultat.

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit alors à :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\phi^2(t)\right| dt\right)^2 = 4\left(\int_{\mathbb{R}} t\phi'(t)\phi(t) dt\right)^2 \leqslant 4 \int_{\mathbb{R}} t^2 \phi^2(t) dt \int_{\mathbb{R}} \phi'^2(t) dt$$

Par isométrie (Fourier) :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi'^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi'}(\omega)\right|^2 d\omega$$

et donc :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\phi^2(t)\right| dt\right)^2 \leqslant \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left|t^2\phi(t)^2\right| dt \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi'}(\omega)\right|^2 d\omega$$

De plus :

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi'}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} \left|\omega^2 \widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Il en résulte :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\phi^2(t)\right| dt\right)^2 \leqslant \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left|t^2\phi(t)^2\right| dt \int_{\mathbb{R}} \left|\omega^2 \widehat{\phi}(\omega)\right|^2 d\omega$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

3. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi^2(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{du}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} t^2\psi^2(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t\frac{\left(e^{-t^2}\right)'}{2}dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t\left(e^{-t^2}\right)}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left(e^{-t^2}\right)}{2}dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \omega^2\hat{\psi}^2(\omega)dt &= 2\pi\int_{\mathbb{R}} \omega^2\psi^2(\omega)dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

5.5 On pose $v = x-y$ et $u = x+y$, on note en majuscule les transformées de Laplace (variable p).

On a :

$$\begin{cases} m\ddot{v} = -kv - 2\eta\dot{v} + f \\ m\ddot{u} = -ku + f \end{cases}$$

et :

$$u(0) = 0,\ v(0) = 2\alpha, \quad \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$$

En appliquant la transformée de Laplace, on obtient alors :

$$\begin{cases} (mp^2 + 2\eta p + k)V = m\dfrac{F_0}{p} + 2m\alpha p \\ (mp^2 + k)U = \dfrac{F_0}{p} \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{(p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2)}\left(\dfrac{F_0}{p} + 2\alpha p\right) \\ U = \dfrac{F_0}{p(p^2 + \omega_0^2)} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$U = \frac{F_0}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{F_0/\omega_0^2}{p} - \frac{F_0 p/\omega_0^2}{(p^2 + \omega_0^2)}$$

On en déduit :

$$u(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} H(t)\,(1 - cos(\omega_0 t))$$

Sachant que $(p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2) = (p + \omega_0)^2$, on a aussi :

$$V = \frac{F_0 + 2\alpha p^2}{p(p+\omega_0)^2} = \frac{F_0/\omega_0^2}{p} + \frac{2\alpha - F_0/\omega_0^2}{p+\omega_0} - \frac{F_0/\omega_0 + 2\alpha}{(p+\omega_0)^2}$$

Par suite :

$$v(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} H(t)\left(1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}\right) + 2\alpha H(t) e^{-\omega_0 t}\,(1 - \omega_0 t)$$

Et, finalement :

$$x(t) = \frac{u+v}{2} = H(t)\left(\frac{F_0}{2\omega_0^2}\left(2 - cos(\omega_0 t) - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}\right) + \alpha e^{-\omega_0 t}\,(1 - \omega_0 t)\right)$$

$$y(t) = \frac{u-v}{2} = H(t)\left(\frac{F_0}{2\omega_0^2}\left(e^{-\omega_0 t} + \omega_0 t e^{-\omega_0 t} - cos(\omega_0 t)\right) - \alpha e^{-\omega_0 t}\,(1 - \omega_0 t)\right)$$

5.6 Soit $p \mapsto F(p, x)$ la transformée de Laplace de $x \mapsto f(t, x)$, et $p \mapsto V(p)$ celle de $t \mapsto v(t)H(t)$.

En appliquant la Transformation de Laplace à l'équation aux dérivées partielles initiale, on obtient :

$$p^2 F - c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

ce qui conduit à :

$$F(p, x) = A(p) e^{-\frac{p}{c}x} + B(p) e^{\frac{p}{c}x}$$

La condition lorsque $x \to +\infty$ implique $B(p) = 0$, et on a donc $A(p) = V(p)$; il reste à conclure en reconnaissant la transformée d'une fonction translatée.

$$F(p, x) = V(p) e^{-\frac{p}{c}x}$$

puis :

$$f(t, x) = v\left(t - \frac{x}{c}\right) H\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

5.7 1. $$\mathcal{L}(f_a) = \int_{\mathbb{R}^+} f_a(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_{\mathbb{R}^+} f(t-a)\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+ - a} f(u)\, e^{-p(u+a)}\, du = e^{-pa} \int_{\mathbb{R}^+} f(u)\, e^{-pu}\, du = e^{-pa}\, \mathcal{L}(f)$$

où on a utilisé la causalité de f pour ramener le domaine d'intégration à $\mathbb{R}^+$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

2. Soit f T-périodique,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \int_{\mathbb{R}^+} f(t)e^{-pt}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-pt}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^T f(t)e^{-p(t+nT)}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)e^{-pt}\,dt \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT}\right)\mathcal{L}(\tilde{f}) = \frac{\mathcal{L}(\tilde{f})}{1-e^{-pT}}\end{aligned}$$

3. On a $p^2F - c^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ avec $F(0,p) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(L,p) = \dfrac{m}{p}$.
4. Cela donne : $F(x,p) = A(p)\,e^{-\frac{px}{c}} + B(p)e^{\frac{px}{c}}$
5. On a $A(p) + B(p) = 0$ et $-A(p)\,e^{-\frac{pL}{c}} + B(p)\,e^{\frac{pL}{c}} = \frac{mc}{p^2}$ donc

$$F(x,p) = \frac{mc}{p^2}\,\frac{1}{e^{\frac{pL}{c}} + e^{-\frac{pL}{c}}}\left(e^{\frac{px}{c}} - e^{-\frac{px}{c}}\right)$$

6. On en déduit

$$\begin{aligned}F(x,p) &= \frac{mc}{p^2}\left(e^{\frac{px}{c}} - e^{-\frac{px}{c}}\right)\frac{e^{-\frac{Lp}{c}} - e^{-3\frac{Lp}{c}}}{1-e^{-\frac{4Lp}{c}}} \\ &= \frac{mc}{p^2(1-e^{-\frac{4Lp}{c}})}\left(e^{-\frac{(L-x)p}{c}} - e^{-\frac{(L+x)p}{c}} - e^{-\frac{(3L-x)p}{c}} + e^{-\frac{(x+3L)p}{c}}\right)\end{aligned}$$

On reconnaît une fonction $\dfrac{4L}{c}-$ périodique, constituée de la combinaison de 4 rampes retardées.

On travaille sur $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{4L}{C}$ à x fixé ($0 \leqslant x \leqslant L$) :

$$\begin{array}{rll} 0 & \text{si} & 0 < t < \dfrac{L-x}{c} \\ t - \dfrac{L-x}{c} & \text{si} & \dfrac{L-x}{c} < t < \dfrac{L+x}{c} \\ \dfrac{2L}{c} & \text{si} & \dfrac{L+x}{c} < t < \dfrac{3L-x}{c} \\ \dfrac{3L+x}{c} - t & \text{si} & \dfrac{3L-x}{c} < t < \dfrac{3L+x}{c} \\ 0 & \text{si} & \dfrac{3L+x}{c} < t \end{array}$$

6 MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES

La séparation des variables est une technique simple permettant l'obtention de solutions d'une équation aux dérivées partielles. Elle connaît actuellement un grand intérêt pour la résolution des problèmes non linéaires multidimensionnels à grand nombre d'inconnues.

Considérons une une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est une fonction f de deux variables x et t, posée sur un domaine prismatique $I_x \times I_t$, où I_x et I_t sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

On suppose qu'au moins un des intervalles est borné :

$$I_x = [a, b] \ , \ -\infty < a < b < +\infty$$

et que l'*EDP* est « séparée », i.e. de la forme :

$$a_1(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_1(t)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + a_2(x)\frac{\partial f}{\partial x} + b_2(t)\frac{\partial f}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(t))f(x,t) = h(x,t) \quad (6.1)$$

Le principe de la séparation des variables est de chercher une solution sous la forme :

$$(x,t) \mapsto f(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x,t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} X_i(x)T_i(t)$$

Différentes approches sont possibles, en fonction de l'espace dans lequel évolue la solution. La méthode employée ici consiste à construire, dans un premier temps, la famille des fonctions $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (qui constitue en fait une base hilbertienne d'un espace bien choisi), puis à déterminer les $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et, finalement, à étudier la convergence de la série de fonctions $\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)$.

Les annexes (B et C) donnent des résultats importants pour la compréhension de ce chapitre.

6.1 FONCTIONS À VARIABLES SÉPARÉES

Soit X une fonction de $x \in I_x$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et Y une fonction de $y \in I_y$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $X \otimes Y$ de $I_x \times I_y$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} X \otimes Y : I_x \times I_y &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto X(x)Y(y) \end{aligned} \quad (6.2)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Définition 6.1

L'opération $\otimes$ est appelée ***produit tensoriel*** (ou ***produit direct***).
Une fonction de la forme $X \otimes Y$ est appelée ***dyade***, ou ***fonction à variables séparées***.

Définition 6.2

$\mathcal{F}(I_x \times I_y)$ étant un ensemble de fonctions définies sur $I_x \times I_y$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on définit l'espace vectoriel engendré par les dyades de fonctions de $\mathcal{F}(I_x)$ et de $\mathcal{F}(I_y)$, noté $\mathcal{F}(I_x) \otimes \mathcal{F}(I_y)$, par :

$\forall f \in \mathcal{F}(I_x) \otimes \mathcal{F}(I_y), \exists N \in \mathbb{N}, \exists (X_i, Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant N} \in \left(\mathcal{F}(I_x) \times \mathcal{F}(I_y)\right)^N$:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N} X_i(x) Y_i(y) \tag{6.3}$$

L'espace $\mathcal{F}(I_x) \otimes \mathcal{F}(I_y)$ est appelé ***produit tensoriel de $\mathcal{F}(I_x)$ et $\mathcal{F}(I_y)$***.

Remarque 6.1

$\mathcal{F}(I_x) \otimes \mathcal{F}(I_y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I_x \times I_y)$.
L'adhérence de $\mathcal{F}(I_x) \otimes \mathcal{F}(I_y)$ est constituée par l'ensemble des séries de fonctions convergentes à variables séparées (dans un sens à préciser : convergence simple, quadratique, uniforme).

Lorsque I_x et I_y sont de longueur finie, un cadre particulièrement favorable est $L^2(I_x \times I_y)$.

En effet :

Proposition 6.1.

i. $L^2(I_x) \otimes L^2(I_y)$ *est dense dans* $L^2(I_x \times I_y)$.

ii. $L^2(I_x) \otimes L^2(I_y)$ *est muni d'une norme (la « crossnorm ») qui coïncide avec la norme usuelle de* $L^2(I_x \times I_y)$.

$$\|X \otimes Y\|_{L^2(I_x) \otimes L^2(I_y)} \overset{def}{=} \|X\|_{L^2(I_x)} \|Y\|_{L^2(I_y)} = \|X \otimes Y\|_{L^2(I_x \times I_y)} \tag{6.4}$$

iii. $L^2(I_x) \otimes L^2(I_y)$ *peut être muni d'un produit scalaire qui coïncide avec celui de* $L^2(I_x \times I_y)$:

$$\begin{aligned} \langle X_1 \otimes Y_1, X_2 \otimes Y_2 \rangle_{L^2(I_x) \otimes L^2(I_y)} &\overset{def}{=} \langle X_1, X_2 \rangle_{L^2(I_x)} \langle Y_1, Y_2 \rangle_{L^2(I_y)} \\ &= \langle X_1 \otimes Y_1, X_2 \otimes Y_2 \rangle_{L^2(I_x \times I_y)} \end{aligned} \tag{6.5}$$

iv. *Si* $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *est une base de* $L^2(I_x)$, *et* $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *une base de* $L^2(I_y)$, *alors* $(X_i \otimes Y_j)_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ *est une base de* $L^2(I_x \times I_y)$.

Démonstration. Les premiers résultats proviennent directement de la construction de l'intégrale de Lebesgue en dimension 2.

Pour montrer que $(X_i \otimes Y_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne, il suffit de montrer qu'aucune fonction de $L^2(I_x \times I_y)$ ne peut être orthogonale à toutes les fonctions de la famille. ■

Dans ce chapitre, on sera en capacité d'exhiber une base de l'espace $L^2(I_x)$ (grâce à l'hypothèse d'intervalle spatial borné, le temps étant en général un intervalle de la forme $[0, +\infty[$).

Remarque 6.2

On considérera, par la suite, des fonctions du temps t et de la variable d'espace x. Il est possible de travailler sur des fonctions de l'espace à 2 ou 3 dimensions grâce à la propriété 6.1, qui autorise à utiliser la forme séparée *a priori*.

Reprenons l'équation aux dérivées partielles de référence.

L'absence de termes en dérivées croisées ($\partial x \partial t$) peut être obtenue par mise sous forme standard, qui assure, en outre, que le terme a_1 ne change pas de signe. On suppose donc celui-ci positif.

Par linéarité, on commence à s'intéresser à l'existence de solutions du **problème homogène** $\mathcal{P}_H$ constitué de l'équation

$$a_1(x)X''(x)\,T(t) + b_1(t)X(x)\,T''(t) + a_2(x)X'(x)\,T(t) + b_2(t)X(x)\,T'(t) + (a_3(x) + b_3(t))X(x)\,T(t) = 0$$

assortie de conditions homogènes sur le bord de I_x, notées $C_H^{I_x}$, sur une dyade $(x, t) \mapsto X(x)T(t)$ non trivialement nulle, ce qui conduit à :

$$\frac{b_1T''(t) + b_2T'(t) + b_3}{T(t)} = -\frac{a_1X''(x) + a_2X'(x) + a_3}{X(x)} \tag{6.6}$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable t, et celui de droite ne dépend que de la variable x : chacun de ces deux membres doit donc être égal à la même constante $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{b_1T''(t) + b_2T'(t) + b_3}{T(t)} = -\frac{a_1X''(x) + a_2X'(x) + a_3}{X(x)} = \lambda \tag{6.7}$$

avec, toujours, les conditions homogènes sur le bord de I_x, $C_H^{I_x}$.

Par suite :

$$\frac{a_1X''(x) + a_2X'(x) + a_3}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow a_1X''(x) + a_2X'(x) + a_3 + \lambda X(x) = 0 \tag{6.8}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

En introduisant la fonction $x \mapsto p(x) = e^{\int_0^x \frac{a_2(y)}{a_1(y)}dy}$, puis, en posant† $s = \frac{p}{a_1}$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + q(x)X + \lambda s(x)X = 0 \\ C_H^{I_x} \end{cases} \tag{6.9}$$

qui est un problème aux valeurs propres particulier en (λ, X) appelé ***problème de Sturm-Liouville***.

Sous certaines hypothèses, assez faibles, le spectre résultant est discret : $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et les fonctions propres associées forment une *base hilbertienne* de l'espace $L^2_s(I_x)$†.

À l'aide de cette base, on cherche les fonctions $(T_i)_{i\in_N}$ telles que l'équation aux dérivées partielles non homogène et les conditions initiales soient respectés.

6.2 Problème de Sturm-Liouville

On étudie dans cette section le problème aux valeurs propres exhibé précédemment (6.9). On donne, pour différentes configurations, les résultats d'existence de bases propres hilbertiennes.

Dans ce qui suit, on travaille sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, p désigne une fonction positive de classe C^1, q une fonction continue, et s une fonction continue et strictement positive.

On introduit l'***opérateur de Sturm-Liouville*** $\mathcal{SL}$, défini par :

$$\mathcal{SL}(X) = \frac{1}{s}\left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{dX}{dx}\right) + qX\right) \tag{6.10}$$

et le problème aux valeurs propres associé :

$$\mathcal{SL}(X) + \lambda X = 0 \tag{6.11}$$

L'opérateur $\mathcal{SL}$ est *a priori* défini sur l'espace des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

†. On remarque que $s > 0$ et $q = a_3 s$.

†. On rappelle que $L^2_s(I_x)$ est l'espace de Hilbert formé par les fonctions dont le carré pondéré par la fonction s est intégrable, voir la remarque B.3

On plonge cet espace dans $L^2_s(I)$, et, à l'aide d'intégrations par parties, on calcule le produit scalaire :

$$\begin{aligned}(\mathcal{SL}(f), g)_{L^2_s(I)} &= \int_I \frac{1}{s}\left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + qf\right) g s dx \\ &= \int_I \left(g\frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + qgfs\right) dx \\ &= \int_I \left(f\frac{d}{dx}\left(p\frac{dg}{dx}\right) + qgfs\right) dx - \left[pg\frac{df}{dx} - pf\frac{dg}{dx}\right]_{\partial I} \\ &= (f, \mathcal{SL}(g))_{L^2_s(I)} - \left[pg\frac{df}{dx} - pf\frac{dg}{dx}\right]_{\partial I}\end{aligned}$$

Dans la suite, on choisit l'intervalle I et les conditions aux limites tels que le terme de bord s'annule, l'opérateur de Sturm-Liouville est alors auto-adjoint dans $L^2_s(I)$:

$$\forall (f, g) \in L^2_s(I)^2,\ (\mathcal{SL}(f), g)_{L^2_s(I)} = (f, \mathcal{SL}(g))_{L^2_s(I)}$$

Le caractère auto-adjoint conduit à l'orthogonalité des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes : si (λ, f) et (μ, g) sont des couples valeurs-vecteurs propres avec $\lambda \neq \mu$, on a directement :

$$(\lambda f, g)_{L^2_s(I)} = (\mathcal{SL}(f), g)_{L^2_s(I)} = (f, \mathcal{SL}(g))_{L^2_s(I)} = (f, \mu g)_{L^2_s(I)}$$

et donc $(\lambda - \mu)(f, g)_{L^2_s(I)} = 0$ ce qui n'est possible que si f et g sont orthogonaux.

On se retrouve donc dans une configuration analogue à l'étude des matrices symétriques en dimension finie. On admet que l'opérateur de Sturm-Liouville (défini sur un espace de dimension infinie) satisfait les hypothèses nécessaires à l'existence d'une base hilbertienne propre dans laquelle il est diagonal.

Définition 6.3

Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

On suppose que p est à valeurs strictement positives. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet ou Neumann ou Fourier, on les écrit de manière générique sous la forme :

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = 0 \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } (a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} |a_0| + |a_1| > 0 \\ |b_0| + |b_1| > 0 \end{cases} \tag{6.12}$$

Sous une telle configuration, on parle de ***problème régulier de Sturm-Liouville***.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Proposition 6.2. *On admet les résultats suivants pour le problème régulier :*

i. Il existe une famille dénombrable non bornée de valeurs propres réelles simples

$$|\lambda_0| < |\lambda_1| < \ldots < |\lambda_n| \qquad \textit{avec} \qquad \lim_{n\to+\infty} |\lambda_n| = +\infty$$

ii. Pour tout entier naturel n, la fonction ϕ_n associée à λ_n vérifie :

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_n}{dx}\right) + (q + s\lambda_n)\phi_n = 0 \tag{6.13}$$

iii. Pour tout entier naturel n, ϕ_n a exactement n zéros sur $]a, b[$; de plus, les zéros de ϕ_{n-1} sont intercalés entre les zéros de ϕ_n.

iv. Si $f \in L^2_s([a, b])$, alors, la série de fonctions $\left(\sum_n (f, \phi_n)_{L^2_s([a,b])}\phi_n\right)$ converge vers f dans $L^2_s([a, b])$ (convergence quadratique).
Si f est de classe C^1 par morceaux, la convergence est simple vers la régularisée

$$x \mapsto \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Si, de plus, f est continue, la convergence est uniforme sur $[a, b]$.

Définition 6.4

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. p est supposée à valeurs strictement positives. Les fonctions données et les conditions aux limites sont supposées compatibles avec un comportement périodique :

$$\begin{cases} p(a) = p(b) \\ q(a) = q(b) \\ s(a) = s(b) \end{cases} \qquad \text{et} \quad \begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases} \tag{6.14}$$

On parle alors de ***problème périodique de Sturm-Liouville***.

Proposition 6.3. *On admet que le problème périodique possède les mêmes propriétés que le problème régulier, à l'exception suivante :*

λ_0 est une valeur propre simple, *mais les* valeurs propres suivantes peuvent être multiples.

On appelle ***problème de Sturm-Liouville singulier*** un problème qui ne vérifie pas les hypothèses précédentes. De nombreuses fonctions spéciales entrent dans cette catégorie.

On donne quelques cas classiques.

Proposition 6.4.

On se place sur le segment $[-1, 1]$*, et on suppose que, pour tout* x *de* $[-1, 1]$ *:*

$$p(x) = (1 - x^2) \ , \ q(x) = 0 \ , \ s(x) = 1$$

Si on cherche des solutions à valeur finie en ± 1*, on obtient les* ***polynômes de Legendre***† $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, pour lesquels :*

$$\lambda_n = n(n + 1) \tag{6.15}$$

Pour tout entier naturel n*,* P_n *est solution de l'équation différentielle :*

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0 \tag{6.16}$$

et donc :

$$P_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dn}\left[(x^2 - 1)^n\right] \ \forall x \in [-1, 1] \tag{6.17}$$

Les polynômes de Legendre forment une base hilbertienne de $L^2([-1, 1])$*.*

Pour tout entier naturel n*,* P_n *a la même parité que* n*, et possède* n *zéros sur* $]-1, 1[$*, qui séparent ceux de* P_{n-1}*.*

Proposition 6.5.

On se place sur $\mathbb{R}$ *tout entier, et on suppose que, pour tout réel* x *:*

$$p(x) = s(x) = e^{-x^2} \ , \ q(x) = 0$$

Si on cherche les solutions à croissance modérée (majorées par un polynôme) à l'infini, on obtient les ***polynômes d'Hermite***‡ $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, pour lesquels :*

$$\lambda_n = 2n \tag{6.18}$$

Pour tout entier naturel n*,* H_n *est solution de l'équation différentielle :*

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{6.19}$$

†. Adrien-Marie Legendre (1752-1833), mathématicien français. Il a apporté de nombreuses contributions en statistique, théorie des nombres, algèbre et analyse.

‡. Charles Hermite (1822-1901), mathématicien français, qui travailla, notamment, sur la théorie des nombres (il a démontré que la base e du logarithme népérien était un *nombre transcendant*, i.e. qui n'est pas racine d'un polynôme), les formes quadratiques, polynômes orthogonaux, les équations différentielles et les fonctions elliptiques. Il fut, également, l'un des premiers scientifiques à utiliser les matrices.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

et donc :

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\,\sqrt{\pi}}} e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6.20}$$

Les polynômes d'Hermite forment une base hilbertienne de $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$.

Ils vérifient les mêmes résultats d'existence des zéros et d'entrelacement de ceux-ci que les polynômes de Legendre.

Proposition 6.6.

On se place sur $\mathbb{R}^+$, *et on suppose que, pour tout réel positif* x :

$$p(x) = s(x) = e^{-x} \ , \ q(x) = 0$$

Si on cherche les solutions à croissance modérée (majorées par un polynôme) à l'infini et à valeur bornée en 0, *on obtient les* ***polynômes de Laguerre***† $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *pour lesquels :*

$$\lambda_n = n \tag{6.21}$$

Pour tout entier naturel n, L_n *est solution de l'équation différentielle :*

$$xL_n''(x) + (1 - x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0 \tag{6.22}$$

et donc :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{6.23}$$

Les polynômes de Laguerre forment une base hilbertienne de $L^2_{e^{-x}}(\mathbb{R}^+)$.

Ils vérifient les mêmes résultats d'existence des zéros et d'entrelacement de ceux-ci que les polynômes de Legendre et Hermite.

Proposition 6.7.

Pour $a > 0$ *et* $\nu > 0$, *on se place sur* $[0, a]$, *et on suppose que, pour tout* x *de* $[0, a]$:

$$p(x) = s(x) = x \ , \ q(x) = -\frac{\nu^2}{x}$$

Si on cherche les solutions à valeur finie en 0 *et valant* 0 *en* a, *on obtient la* ***fonction de Bessel de première espèce***‡, *d'indice* ν, J_ν.

†. Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886), mathématicien français, qui apporta de nombreuses contributions à l'analyse et la géométrie.

‡. Ces fonctions furent découvertes par Daniel Bernoulli, mais portent le nom du mathématicien et astronome allemand Friedrich Bessel (1784-1846) , qui les utilisa pour la résolution de problèmes de mécanique céleste faisant intervenir la théorie des perturbations. F. Bessel effectua notamment, en 1838, les premières mesures précises de la distance d'une étoile à un autre corps céleste. Il calcula également le diamètre et la masse terrestres, ainsi que la valeur de l'aplatissement aux pôles.

Pour tout entier strictement positif n, la fonction $x \mapsto J_\nu(s_n x)$ *est solution du problème de Sturm-Liouville pour lequel*

$$\lambda_n = s_n^2 \tag{6.24}$$

où $(a\, s_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *est la suite (infinie) des zéros de* J_ν.

Pour tout entier strictement positif n, la fonction $x \mapsto J_\nu(s_n x)$ *est solution de l'équation différentielle :*

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(s_n x)}{dx}\right) - \frac{\nu^2}{x}J_\nu(s_n x) + s_n^2 x J_\nu(s_n x) = 0 \quad \forall x \in]0, a[\tag{6.25}$$

J_ν n'a pas, a priori, d'expression analytique simple.
J_ν a une infinité de zéros sur $\mathbb{R}^+$; entre deux zéros consécutifs de J_ν, il y a exactement un zéro de $J_{\nu-1}$.

La suite de fonctions $(x \mapsto J_\nu(s_n x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *est une base orthogonale de* $L^2_x([0, a])$.

Exemple 6.1

On considère le problème de Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dx^2} + \lambda f = 0 & (\mathcal{E}) \\ f(0) = f(1) & (\mathcal{F}_1) \\ f'(0) = f'(1) & (\mathcal{F}_2) \end{cases} \tag{6.26}$$

On reconnaît un problème périodique.

Pour chercher les valeurs propres λ et les fonctions propres non indentiquement nulles f associées, on résout l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ et on vérifie à quelles conditions les valeurs aux limites peuvent être satisfaites.

i. Si $\lambda = 0$, alors :

$$\begin{cases} f(x) = \alpha x + \beta & (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ \beta = \alpha + \beta \\ \alpha = \alpha \end{cases}$$

Par suite :

$$f(x) = \beta \ , \ \beta \in \mathbb{R}^*$$

$\lambda = 0$ est donc valeur propre simple. Les fonctions propres associées sont les fonctions constantes non nulles.

ii. Si $\lambda > 0$, alors, en posant $\lambda = \omega^2$, on obtient :

$$\begin{cases} f(x) = \alpha \cosh(\omega x) + \beta \sinh(\omega x) & (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ \alpha = \alpha \cosh(\omega) + \beta \sinh(\omega) \\ \omega\beta = \omega\alpha \sinh(\omega) + \omega\beta \cosh(\omega) \end{cases}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

La vérification des conditions aux limites conduit au système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \cosh(\omega) - 1 & \sinh(\omega) \\ \sinh(\omega) & \cosh(\omega) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice vaut $2(1 - \cosh(\omega)) > 0$; ainsi, $\alpha = \beta = 0$, ce qui donne alors $f = 0$: le cas $\lambda > 0$ est donc à rejeter.

iii. Si $\lambda < 0$, alors, en posant $\lambda = -\omega^2$, on obtient :

$$\begin{cases} f(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x) & (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ \alpha = \alpha \cos(\omega) + \beta \sin(\omega) \\ \omega\beta = -\omega\alpha \sin(\omega) + \omega\beta \cos(\omega) \end{cases}$$

La vérification des conditions aux limites conduit donc au système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega) - 1 & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut $2(1 - \cos(\omega))$. Pour $\omega = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$), le déterminant est nul, et une solution non triviale est possible.

Les constantes α et β sont alors arbitraires.

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_n = -(2n\pi)^2$ est donc de dimension 2, une base possible est formée des fonctions

$$x \mapsto f_{n,1}(x) = \sqrt{2}\sin(2n\pi x) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto f_{n,2}(x) = \sqrt{2}\cos(2n\pi x)$$

où le coefficient a été choisi de manière à normaliser les fonctions.

Cet exemple illustre bien comment les conditions aux limites sur un intervalle borné « obligent » le spectre à ne prendre que certaines valeurs discrètes.

6.3 Séparation des variables

On a vu que le problème de Sturm-Liouville était posé avec conditions aux limites homogènes sur le bord de I_x. La définition suivante montre que ce cadre n'empêche pas de traiter des problèmes plus généraux.

Définition 6.5

On appelle ***relèvement des conditions aux limites*** une fonction qui satisfait les conditions aux limites, suffisamment régulière pour être introduite dans l'opérateur différentiel.

Soit $(x, t) \mapsto f_r(x, t)$ un relèvement des conditions aux bords du système (6.1).

Quitte à poser

$$f(x,t) = f_r(x,t) + \tilde{f}(x,t)$$

et à remplacer le second membre par

$$\tilde{h}(x,t) = h(x,t) \ \ldots \\ - \left(a_1(x)\frac{\partial^2 f_r}{\partial x^2} + b_1(t)\frac{\partial^2 f_r}{\partial t^2} + a_2(x)\frac{\partial f_r}{\partial x} + b_2(t)\frac{\partial f_r}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(t))f_r(x,t) \right)$$

alors, $\tilde{f}$ est solution de la même *EDP*, avec pour second membre $\tilde{h}$ et des conditions aux limites nulles (voir l'exercice 6.4 pour un exemple de relèvement).

On reprend alors l'équation (6.1), où l'on fait apparaître un opérateur de Sturm-Liouville :

$$\mathcal{SL}(f) + b_1(t)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + b_2(t)\frac{\partial f}{\partial t} + b_3(t)f(x,t) = h(x,t) \tag{6.27}$$

avec, toujours, les conditions homogènes au bord et les conditions initiales sur I_x :

$$\begin{cases} f(x,0) = f_0(x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_0(x) \end{cases} \tag{6.28}$$

6.3.1 Détermination des fonctions temporelles

Il semble alors légitime de chercher la solution sous la forme

$$(x,t) \mapsto f(x,t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} X_i(x)T_i(t)$$

où $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la base hilbertienne solution du problème du Sturm-Liouville, chaque X_i étant associé à la valeur propre λ_i.

On obtient alors :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{SL}(X_i)T_i + b_1 T_i'' X_i + b_2 T_i' X_i + b_3 X_i T_i \right) = h(x,t)$$

soit :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left(-\lambda_i X_i T_i + b_1 T_i'' X_i + b_2 T_i' X_i + b_3 X_i T_i \right) = h(x,t)$$

puis :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} X_i \left(b_1 T_i'' + b_2 T_i' + (b_3 - \lambda_i)T_i \right) = h(x,t) \tag{6.29}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

En exploitant le fait que la famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est orthonormale† pour découpler les équations, on projette suivant X_j, $j \in \mathbb{N}$:

$$\left(X_j, \sum_{i\in\mathbb{N}} X_i\left(b_1 T_i'' + b_2 T_i' + (b_3 - \lambda_i)T_i\right)\right)_{L^2_s(I_x)} = \left(X_j, h(x,t)\right)_{L^2_s(I_x)} \tag{6.30}$$

ce qui conduit à :

$$b_1 T_j'' + b_2 T_j' + (b_3 - \lambda_j)T_j = \left(X_j, h(x,t)\right)_{L^2_s(I_x)} \tag{6.31}$$

Chaque T_j est donc solution d'une équation différentielle ordinaire (*EDO*).

Les conditions initiales des *EDO* ainsi obtenues sont également données par projection des conditions initiales de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned} f(x,0) = \sum_{i\in\mathbb{N}} X_i(x)T_i(0) = f_0(x) \quad &\Rightarrow \quad T_j(0) = \left(X_j, f_0(x)\right)_{L^2_s(I_x)} \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \sum_i X_i(x)T_i'(0) = g_0(x) \quad &\Rightarrow \quad T_j'(0) = \left(X_j, g_0(x)\right)_{L^2_s(I_x)} \end{aligned} \tag{6.32}$$

Les T_j, $j \in \mathbb{N}$, sont solutions d'équations différentielles ordinaires avec des conditions initiales découplées. Ils sont donc entièrement déterminés.

La série $\left(\sum_i X_i T_i\right)$ est donc connue.

Considérons alors, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, la somme partielle d'indice N :

$$f_N(x,t) = \sum_{n\leqslant N} X_n(x)T_n(t)$$

Il reste alors à déterminer si la suite de fonctions $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge bien vers la solution lorsque N tend vers l'infini, mais aussi quel est le type de convergence (simple, uniforme) et quelle est la régularité de la limite.

Actuellement, les seules informations relatives à la convergence sont connues en $t = 0$ où les $T_n(0)$ et $T_n'(0)$, $n \in \mathbb{N}$, sont issus de la projection de fonctions connues sur la base hilbertienne : si les données initiales f_0 et g_0 sont des fonctions de $L^2_s(I_x)$, le théorème de Parseval permet d'affirmer la convergence absolue des séries numériques $\sum_n |T_n(0)|$ et $\sum_n |T_n'(0)|$. En fonction de la régularité de ces mêmes données initiales, il y a convergence simple ou uniforme de la série de fonctions $\sum_n T_n(0)X_n$ et $\sum_n T_n'(0)X_n$.

†. Il ne faut pas oublier de normaliser les fonctions.

6.3.2 Convergence de la série de fonctions

Définition 6.6

Une série de fonctions de terme général s_p et de somme partielle $\left(x \mapsto S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} s_p(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge uniformément*** sur $[a, b]$ vers une fonction S lorsque n tend vers l'infini si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in [a, b]\ |S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$$

Proposition 6.8. *S'il existe une suite positive $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général α_p converge $\left(\sum_{\mathbb{N}} \alpha_p < +\infty\right)$ et telle que :*

$$\exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, b],\ \forall p \geqslant p_0,\ |s_p(x)| < \alpha_p$$

alors, la suite de fonctions $\left(x \mapsto S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} s_p(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$. On parle de convergence normale.

Théorème 6.9.

i. Si, pour tout entier naturel p, s_p est une fonction continue, et si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S, alors S est continue sur $[a, b]$.

ii. Si, pour tout entier naturel p, s_p est de classe C^1, si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, et si la suite de fonctions $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, alors S est de classe C^1, et

$$S' = \sum_{p\in\mathbb{N}} s'_p$$

Les définitions et résultats précédents sont encore valables pour des fonctions de plusieurs variables et la convergence uniforme d'une série de fonctions continues entraîne la continuité de la série, la dérivabilité (partielle) des termes et la convergence uniforme de la série dérivée entraîne la dérivabilité partielle de la série.

Remarque 6.3

i. Un cas d'application classique est le suivant : considérons la série numérique, convergente, de terme général $|T_n(0)|$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On suppose, en outre, qu'il existe une constante positive A telle que, pour tout t, on ait : $|T_n(t)| \leqslant A|T_n(0)|$. On suppose, de plus que la série de fonctions $\sum_n T_n(0)X_n$ converge uniformément.

Alors, il y a convergence normale (et donc uniforme) de la série de terme général X_nT_n.

ii. En général, la convergence de la série $\sum_n X_nT_n$ ne pose pas trop de difficultés. Il ne faut pas oublier de s'assurer de la convergence des séries dérivées.

6.3.3 Troncature

En pratique, on ne calcule que les premiers termes du développement. Il est donc important de pouvoir évaluer l'erreur commise suite à une troncature.

Proposition 6.10. ***Approximation, mesure de l'erreur***

Supposons qu'il existe un réel A strictement positif tel que, pour tout réel t de I_t :

$$|T_n(t)| \leqslant A|T_n(0)|$$

On tronque le développement de f au rang p, en posant :

$$f_p(x,t) = \sum_{n=0}^{p} X_n(x)T_n(t)$$

ainsi que celui concernant la condition initiale :

$$f_p^0(x) = \sum_{n=0}^{p} \left(X_n, f^0\right)_{L_s^2} X_n(x) = \sum_{n=0}^{p} X_n(x)T_n(0) = f_p(x,0)$$

Alors†*, à $t = 0$:*

$$\|f^0 - f_p^0\|^2 = \left\|\sum_{n>p} X_nT_n(0)\right\|^2 = \sum_{n>p} |T_n(0)|^2 = \|f^0\|^2 - \|f_p^0\|^2 \tag{6.33}$$

et, à t fixé :

$$\begin{aligned} \|f(x,t) - f_p(x,t)\|^2 &= \left\|\sum_{n>p} X_n(x)T_n(t)\right\|^2 = \sum_{n>p} |T_n(t)|^2 \\ &\leqslant A\sum_{n>p} |T_n(0)|^2 = A(\|f^0\|^2 - \|f_p^0\|^2) \end{aligned} \tag{6.34}$$

On est donc capable de majorer à chaque instant l'erreur commise en tronquant un développement à l'ordre p.

†. Les normes sont au sens de L_s^2, et les X_n sont supposés normalisés.

Exemple 6.2 Propagation de la chaleur dans un barreau métallique

On considère un barreau cylindrique métallique, d'axe $(0x)$, de longueur L, de chaleur massique c, de masse volumique ρ, et de conductibilité thermique K.

On désigne par $\theta : (x,t) \mapsto \theta(x,t)$ la température du barreau.

Il est supposé initialement soumis au champ de température θ_0 : $\theta(x,0) = \theta_0(x)$.

Les conditions aux limites sont homogènes, de type Dirichlet sur le bord gauche ($x = 0$) et de type Robin sur le bord droit ($x = L$), le coefficient d'échange est noté h.

Toutes les constantes introduites sont bien sûr strictement positives.

Le problème aux frontières $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ modélisant la diffusion de la chaleur dans le barreau est :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t) = \frac{K}{\rho c}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t) \qquad \forall x \in]0,L[\,,\ \forall t > 0 \qquad (\mathcal{E})$$

$$\theta(0,t) = 0 \qquad (\mathcal{F}_1)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(L,t) + h\theta(L,t) = 0 \qquad (\mathcal{F}_2)$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x) \qquad (\mathcal{I})$$

Pour obtenir de bonnes propriétés de convergence, on suppose que θ_0 est de carré intégrable et continûment dérivable sur $[0,L]$, et qu'elle vérifie la condition de compatibilité :

$$\theta_0(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta_0}{dx}(L) + h\theta_0(L) = 0$$

On commence par rechercher une solution de $(\mathcal{E})$ sous la forme :

$$\theta(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Par suite :

$$X(x)\,T'(t) = \frac{K}{\rho c}\,X''(x)\,T(t)$$

θ_0 étant non identiquement nulle, il en est nécessairement de même pour X et T. Il existe donc un domaine $[a,b]\times[t_1,t_2]$ de $\mathbb{R}^2$ où X et T ne s'annulent pas. Dans ce domaine, on a donc :

$$\frac{K}{\rho c}\,\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable x, et celui de droite de la variable t uniquement ; il existe donc une constante λ telle que :

$$\frac{K}{\rho c}\,\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

S'il existe un réel x_0 en lequel X s'annule, alors, comme T ne s'annule pas sur $[t_1,t_2]$, on a :

$$X''(x_0)T(t) = 0$$

La relation

$$\frac{K}{\rho c}\,X''(x) - \lambda\,X(x) = 0$$

est donc encore vérifiée.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Par suite, pour tout x de $]0, L[$:

$$X''(x) - \frac{\rho c}{K} \lambda X(x) = 0$$

Il faut donc chercher des solutions à l'équation différentielle précédente, la forme de celles-ci changeant avec le signe de λ, il faut discuter selon les cas.

i. Supposons $\lambda = 0$; on aurait alors :

$$X(x) = \alpha x + \beta \qquad \text{avec} (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} \theta(0, t) = 0 = \beta \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) + h\theta(L, t) = 0 = \alpha + hL\alpha + h\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

X devant être non identiquement nulle, le cas $\lambda = 0$ est à rejeter.

ii. De même, on exclut le cas $\dfrac{\rho c}{K} \lambda = \omega^2 > 0$, car alors :

$$X(x) = \alpha \cosh(\omega x) + \beta \cosh(\omega x) \qquad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

La condition de Dirichlet en 0 donne $\alpha = 0$, celle de Robin en L donne alors :

$$\beta(h \sinh(\omega L) + \omega \cosh(\omega L)) = 0 \qquad \Rightarrow \beta = 0$$

iii. $\dfrac{\rho c}{K} \lambda$ est donc strictement négatif, on pose $\dfrac{\rho c}{K} \lambda = -\omega^2$
On a donc :

$$X(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x) \qquad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

La condition de Dirichlet en 0 donne $\alpha = 0$, celle de Robin en L donne alors :

$$\beta (\omega \cos(\omega L) + h \sin(\omega L)) = 0$$

Les solutions non triviales ($\beta \neq 0$) sont donc obtenues pour :

$$\frac{\omega}{h} + \tan(\omega L) = 0$$

Cette équation admet une infinité dénombrable de solutions que l'on note $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La figure 6.1 représente les solutions ω_n, $n \in \mathbb{N}$, pour $n = 0, 1, 2$:
ces solutions sont obtenues graphiquement comme étant les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $\omega \mapsto \tan(\omega L)$ et de la droite représentant la fonction $\omega \mapsto \dfrac{\omega}{h}$.

La solution du problème de Sturm-Liouville est donc donnée par :

$$\begin{cases} \lambda_n = -\dfrac{K}{\rho c} \omega_n^2 \\ X_n(x) = \beta_n \sin(\omega_n x) \end{cases}$$

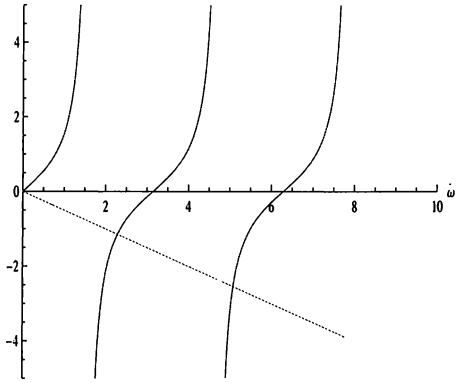


Figure 6.1 - Obtention graphique des ω_n

Pour normaliser les fonctions, on calcule :

$$\begin{aligned}
1 &= \beta_n^2 \int_0^L \sin^2(\omega_n x)dx \\
&= \beta_n^2 \left(\int_0^L \frac{1 - \cos(2\omega_n x)dx}{2} \right) \\
&= \beta_n^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{\sin(2\omega_n L)}{4\omega_n} \right) \\
&= \beta_n^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{2\tan(\omega_n L)}{4\omega_n(1 + \tan^2(\omega_n L))} \right) \\
&= \beta_n^2 \left(\frac{L}{2} + \frac{h}{2(h^2 + \omega_n^2)} \right)
\end{aligned}$$

qui donne l'expression de β_n.

On a alors :

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2(h^2 + \omega_n^2)}{h + L(h^2 + \omega^2)}} \sin(\omega_n x)$$

D'après le théorème de Sturm-Liouville, la famille des $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, L])$.

On cherche alors la solution de l'*EDP* sous la forme $\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n T_n$.

L'équation dans $[0, L]$ devient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n T_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{K}{\rho c} X_n'' T_n$$

puis :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n (T_n' + \lambda_n T_n) = 0$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ce qui implique

$$T_n' + \lambda_n T_n = 0$$
$$T_n = T_n(0)e^{-\lambda_n t}$$

Pour déterminer les $T_n(0)$, $n \in \mathbb{N}$, on utilise la condition initiale :

$$\theta_0(x) = \theta(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x) T_n(0)$$

D'après les hypothèses sur θ_0, on peut développer cette fonction sur la base et on sait qu'il y a convergence quadratique et uniforme de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} T_n(0)\, X_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\theta_0, X_n)_{L^2([0,L])}\, X_n(x)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(0) = (\theta_0, X_n)_{L^2([0,L])}$$

D'où, finalement :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,(h^2 + \lambda_n)}{h + L\,(h^2 + \lambda_n)} \left\{ \int_0^L \theta_0(y)\, \sin(\omega_n\, y)\, dy \right\} \sin(\omega_n\, x)\, e^{-\lambda_n\, t} \tag{6.35}$$

Réciproquement :

Vérifions que la fonction θ ainsi obtenue est bien solution du problème aux frontières initial $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

Le théorème de Parseval donne $\sum_n |T_n(0)| = \|\theta\|_{L^2([0,L])}$: il y a donc convergence uniforme de la série en $t = 0$.

Par ailleurs, les $|T_n|$ sont des fonctions décroissantes en temps. La série $\sum_n X_n T_n$ est donc uniformément convergente sur $[0, L] \times [0, +\infty[$.

Reste à savoir si elle est une fois continûment dérivable.

On calcule à cet effet le terme général de la série dérivée une fois en temps† :

$$T_n' = -\lambda_n T_n$$

Pour $0 < t_0 < t$, on a :

$$|T_n'(t)| = \lambda_n |T_n(t)| = \lambda_n e^{-\lambda_n (t_0 - t)} |T_n(t_0)|$$

pour n suffisamment grand le terme en $\lambda_n e^{-\lambda_n (t_0 - t)}$ est plus petit que 1 et la série converge comme celle de terme général $|T_n(t_0)|$. Il y a donc convergence uniforme de la série dérivée sur $[0, L] \times]0, +\infty[$ et

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x) T_n'(t)$$

La fonction obtenue est donc bien solution du problème aux frontières initial $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

†. C'est le même terme que la série dérivée deux fois en espace.

Exercices

6.1 Vibrations libres d'une poutre

L'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère une poutre horizontale en équilibre, homogène, de longueur L, de section droite constante, en appui simple à ses deux extrémités.

On désigne par E le module d'élasticité (module d'Young) de la poutre, et par I le moment d'inertie de la section droite.

En l'absence de forces extérieures, la déflexion verticale y au point d'abscisse x et à l'instant t vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$E I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

On suppose que, à l'instant initial $t = 0$:

$$y(x, 0) = u_0(x)$$

et que chaque point de la poutre est animé d'une vitesse transversale connue :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$$

où u_0 et v_0 sont deux fonctions de classe C^2 sur $[0, L]$.

Les conditions aux limites d'appui simples se traduisent par un déplacement et un moment nul aux extrémités :

$$\begin{aligned} &y(0, t) = y(L, t) = 0 \\ &E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0 \end{aligned} \qquad (\mathcal{F})$$

Déterminer, avec ces conditions aux limites, la solution de l'équation aux dérivées partielles $(\mathcal{E})$.

6.2 Vibrations d'une membrane circulaire

Si on frappe la membrane d'un tambour en son centre, elle oscillera à des fréquences bien particulières (« les fréquences propres »). Le son émis par le tambour correspond ainsi à la superposition des fréquences propres, avec, pour chaque fréquence, une amplitude qui dépend de la manière dont on a excité le tambour. Le cas d'un tam-

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

bour à cadre circulaire, a été résolu par Rudolf Friedrich Alfred Clebsch† en 1862. Mais le problème est encore ouvert : en 1966, le mathématicien M. Kac a posé la question suivante : « Peut-on entendre la forme d'un tambour ? », i.e. la forme du tambour est-elle déterminée de manière univoque par le spectre ?[11, 13]

L'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On désigne par (r, φ) les coordonnées polaires d'un point du plan $z = 0$.

On considère une membrane, fixée sur un cadre circulaire du plan $z = 0$, de centre O, de rayon a.

f étant une fonction donnée des variables r et φ, de classe C^2, le déplacement vertical d'un point de la membrane et la vitesse, à l'instant $t = 0$, sont :

$$\begin{cases} z(t = 0; r, \varphi) = f(r, \varphi) \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}(t = 0; r, \varphi) = 0 \end{cases}$$

On suppose que le déplacement vertical d'un point de la membrane, à l'instant t, vérifie :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \, \Delta z$$

où Δz désigne le Laplacien de la fonction z, dont on rappelle l'expression en coordonnées polaires :

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$$

La fixation au bord du cadre circulaire est telle que :

$$z(t; r = a, \varphi) = 0$$

Remarque 6.4

On se trouve dans un cas où l'espace est de dimension 2. La démarche va être la même : détermination d'une base de fonctions spatiales puis projection pour déterminer la dépendance en temps. Par ailleurs, d'après les résultats de densité donnés en début de chapitre, il est légitime de chercher une base de l'espace des fonctions spatiales à variables séparées.

1. Pour $t \geqslant 0$, $r \in [0, a]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$, on recherche une solution z du problème homogène sous la forme :

$$z(t; r, \varphi) = T(t) R(r) \Phi(\varphi)$$

   (a) Montrer que Φ est périodique, et préciser sa période.

†. Mathématicien prussien (1833-1872), connu pour ses contributions à la géométrie algébrique, la théorie des invariants et les applications de la dualité à la statique graphique.

(b) Montrer qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que :

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu\,\Phi(\varphi) = 0 & (\mathcal{E}_\Phi) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[r\dfrac{dR}{dr}\right] + (\lambda - \dfrac{\mu}{r^2})\,R(r) = 0 & (\mathcal{E}_R) \end{cases}$$

(c) Donner l'ensemble des fonctions $(\Phi_n)n \in \mathbb{N}$ solutions de $(\mathcal{E}_\Phi)$.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel n, R est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[r\dfrac{dR}{dr}\right] + (\lambda - \dfrac{n^2}{r^2})\,R(r) = 0 \\ R(a) = 0 \end{cases}$$

Ce problème, quand on lui adjoint la condition de valeur finie de R en $r = 0$, est un problème singulier de Sturm-Liouville dont on donne les principaux résultats :

- Soit J_n la fonction de Bessel de première espèce :

$$J_n(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k}$$

J_n admet une infinité dénombrable de zéros sur $\mathbb{R}^+$ notés $(s_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, le problème de Sturm-Liouville ainsi obtenu admet une infinité dénombrable de solutions $(\lambda_{n,p}, R_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ avec :

$$\lambda_{n,p} = \left(\frac{s_{n,p}}{a}\right)^2 \quad , \quad R_{n,p}(r) = J_n\left(s_{n,p}\frac{r}{a}\right)$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, les $(R_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ forment une base orthogonale (non normée) de $L^2_r([0, a])$.

2. Donner, en fonction de f et des fonctions $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, l'expression du déplacement vertical z.

6.3 Cas où l'espace est pondéré

On considère l'équation aux dérivées partielles pour $x \in]1, e[$, $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\,x\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (\mathcal{E})$$

avec les conditions aux limites† :

$$\begin{cases} u(1, t) = 0\ \forall t > 0 \\ u(e, t) = 0\ \forall t > 0 \end{cases} \qquad (C\mathcal{L})$$

†. e désigne la base du logarithme népérien ($\ln e = 1$).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad (CI)$$

où f est une fonction continue sur $]1, e[$.

On cherche ici à résoudre cette équation par la méthode de séparation des variables, en recherchant la solution sous la forme :

$$u : (x,t) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}^*} X_k(x)\, T_k(t)$$

1. En profitant de l'homogénéité du problème, on pose directement :

   $$u(x,t) = X(x)\, T(t)$$

   dans $(\mathcal{E})$.

   Montrer que pour que cette forme séparée satisfasse $(\mathcal{E})$, il doit exister une constante réelle λ telle que X soit solution de l'équation différentielle suivante :

   $$\frac{x^2 X'' + 3\,x\,X'}{X} = \lambda \qquad (\mathcal{E}_X)$$

2. En utilisant les conditions aux limites, donner les valeurs de $X(1)$ et $X(e)$.
3. Pour résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_X)$, on utilise le changement de variable $x = e^z$ et on pose $Z(z) = X(x)$.

   Montrer que l'équation devient :

   $$Z''(z) + 2\,Z'(z) - \lambda\, Z(z) = 0 \qquad (\mathcal{E}_Z)$$

4. Donner les valeurs de $Z(0)$ et $Z(1)$.
5. (a) Dans le cas où $1 + \lambda > 0$, on pose $1 + \lambda = \omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}^+$.

   Donner alors la forme générale des solutions de $(\mathcal{E}_Z)$.

   Ce cas est-il compatible avec les conditions aux limites ?

   (b) Dans le cas où $1 + \lambda = 0$, donner la forme générale des solutions de $(\mathcal{E}_Z)$.

   Ce cas est-il compatible avec les conditions aux limites ?

   (c) Dans le cas où $1 + \lambda < 0$, on pose $1 + \lambda = -\omega^2$, $\omega \in R^+$.

   i. Donner alors la forme générale des solutions de $(\mathcal{E}_Z)$

   ii. Ce cas peut-il être compatible avec les conditions aux limites ?

   Montrer alors que $\omega = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, et donner, pour un entier k, l'expression correspondante, notée $Z_k(z)$, de $Z(z)$.

   iii. En déduire, pour un entier k, l'expression correspondante de $X(x)$, notée $X_k(x)$.

   Quelle propriété vérifie la famille des (X_k) ?

iv. Montrer que les fonctions (T_k) associées sont solutions d'équations différentielles découplées :

$$T_k'' - \lambda_k T_k = 0 \qquad (\mathcal{E}_T)$$

Donner l'expression des T_k.

v. En exploitant les conditions initiales, montrer que :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{x} \sin\left(\sqrt{1+k^2\pi^2}\, t\right) \sin(k\pi \ln x)$$

où les c_k désignent des constantes réelles à déterminer.

6.4 Conditions aux limites non homogènes

Soit a, b, α, β, u_0 et l des réels strictement positifs tels que :

$$a\pi^2 > bl^2$$

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \forall (x,t) \in]0,l[\times]0,+\infty[$$

avec les conditions aux limites non homogènes

$$\begin{cases} u(0,t) = u_0 e^{-\alpha t} & \forall t > 0 \\ u(l,t) = u_0 e^{-\beta t} & \forall t > 0 \end{cases}$$

et la condition

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \qquad \forall x \in]0,l[$$

Pour aller plus loin

Un exercice supplémentaire et son corrigé sont en accès libre à partir des pages d'accueil du livre sur le site www.dunod.com

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Corrigés

6.1 Afin de chercher la base des fonctions de l'espace, vu que l'équation et les conditions aux limites sont homogènes, on injecte directement la forme séparée dans les équations :

$$y(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Il en résulte :

$$E\,I\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho\,S\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = E\,I\,X^{(4)}(x)\,T(t) + \rho\,S\,X(x)\,T''(t) = 0$$

La solution devant être non identiquement nulle, il en est nécessairement de même pour X et T. Il existe donc un domaine $[a, b] \times [t_1, t_2]$ de $\mathbb{R}^2$ où X et T ne s'annulent pas. Dans ce domaine, on a donc :

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{\rho\,S}{E\,I}\,\frac{T''(t)}{T(t)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable x, et celui de droite de la variable t uniquement ; il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{\rho\,S}{E\,I}\,\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$$

S'il existe un réel x_0 en lequel X s'annule, alors, comme T ne s'annule pas sur $[t_1, t_2]$, on a donc :

$$X^{(4)}T(t) = 0$$

La relation

$$X^{(4)}(x) = \lambda\,X(x)$$

est donc encore vérifiée.

Par suite, la fonction de l'espace doit être solution du système suivant :

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) = \lambda\,X(x) & \forall x \in]0, L[\\ X(0) = X(L) = 0 \\ X''(0) = X''(L) = 0 \end{cases}$$

Cette équation différentielle ordinaire du quatrième degré fonctionne comme un problème de Sturm-Liouville. Le polynôme caractéristique est :

$$r^4 - \lambda$$

Les solutions diffèrent selon le signe de λ.

i. Si $\lambda = 0$, on a

$$X(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \qquad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$$

Les conditions aux limites conduisent à $a = b = c = d = 0$.
Ce cas est à éliminer.

ii. Si $\lambda < 0$, on pose $\delta = |\lambda|^{-\frac{1}{4}}$. On rappelle que les racines quatrièmes de (-1) sont les complexes $\pm e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\pm e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
On a donc :

$$X(x) = ae^{\frac{x}{\delta}e^{i\frac{\pi}{4}}} + be^{-\frac{x}{\delta}e^{i\frac{\pi}{4}}} + ce^{\frac{x}{\delta}e^{i\frac{3\pi}{4}}} + de^{-\frac{x}{\delta}e^{i\frac{3\pi}{4}}} \qquad (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4,\ \mathrm{Im}(X) = 0$$

Les conditions aux limites en 0 donnent :

$$X(0) = a + b + c + d = 0$$

$$X''(0) = \frac{i}{\delta^2}(a + b - c - d) = 0$$

donc $a = -b$ et $c = -d$. Donc

$$X(x) = a(e^{\frac{x}{\delta}e^{i\frac{\pi}{4}}} - e^{\frac{x}{\delta}e^{-i\frac{\pi}{4}}}) + c(e^{\frac{x}{\delta}e^{i\frac{3\pi}{4}}} - e^{\frac{x}{\delta}e^{-i\frac{3\pi}{4}}})$$

$$X(L) = a(e^{\frac{L}{\delta}e^{i\frac{\pi}{4}}} - e^{\frac{L}{\delta}e^{-i\frac{\pi}{4}}}) + c(e^{\frac{L}{\delta}e^{i\frac{3\pi}{4}}} - e^{\frac{L}{\delta}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}) = 0$$

$$X''(L) = \frac{i}{\delta^2}\left(a(e^{\frac{L}{\delta}e^{i\frac{\pi}{4}}} - e^{\frac{L}{\delta}e^{-i\frac{\pi}{4}}}) - c(e^{\frac{L}{\delta}e^{i\frac{3\pi}{4}}} - e^{\frac{L}{\delta}e^{-i\frac{3\pi}{4}}})\right) = 0$$

ce qui donne directement $a = c = 0$.
Ce cas est également à éliminer.

iii. Si $\lambda > 0$, on pose $\delta = \lambda^{-\frac{1}{4}}$.
Les racines du polynômes sont $r = \pm\delta^{-1}$ et $r = \pm i\delta^{-1}$.
Les solutions sont de la forme :

$$X(x) = a\cos\left(\frac{x}{\delta}\right) + b\sin\left(\frac{x}{\delta}\right) + c\cosh\left(\frac{x}{\delta}\right) + d\sinh\left(\frac{x}{\delta}\right) \qquad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}$$

Les conditions en 0 donnent :

$$X(0) = a + c = 0$$

$$X''(0) = \frac{1}{\delta^2}(-a + c) = 0$$

d'où $a = c = 0$.
Alors les conditions en L donnent :

$$X(L) = b\sin\left(\frac{L}{\delta}\right) + d\sinh\left(\frac{L}{\delta}\right) = 0$$

$$X''(L) = \frac{1}{\delta^2}\left(-b\sin\left(\frac{L}{\delta}\right) + d\sinh\left(\frac{L}{\delta}\right)\right) = 0$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Comme $\sinh\left(\frac{L}{\delta}\right) \neq 0$, alors : $d = 0$.

Finalement, pour obtenir une solution non triviale, il faut que

$$\frac{L}{\delta} \in \pi \mathbb{N}^*$$

On pose alors :

$$\delta_k = \frac{L}{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{x}{\delta_k}\right)$$

Les X_k, $k \in \mathbb{N}$, sont normalisés au sens du produit scalaire de l'espace $L^2([0, L])$, dont ils forment une base hilbertienne.

On cherche alors la solution sous la forme

$$(x, t) \mapsto y(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} X_k(x) T_k(t)$$

On reprend l'équation initiale :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{E I} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(X_k^{(4)} T_k + \frac{\rho S}{E I} T_k'' \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} X_k \left(\frac{1}{\delta_k^4} T_k + \frac{\rho S}{E I} T_k'' \right) \end{aligned}$$

On utilise alors l'indépendance des X_k pour se ramener à des équations scalaires découplées :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 = T_k'' + \frac{E I}{\rho S \delta_k^4} T_k$$

$$T_k(t) = T_k(0) \cos\left(\sqrt{\frac{E I}{\rho S \delta_k^4}} t \right) + \sqrt{\frac{\rho S \delta_k^4}{E I}} T_k'(0) \sin\left(\sqrt{\frac{E I}{\rho S \delta_k^4}} t \right)$$

Les constantes s'obtiennent par projection des conditions initiales :

$$u_0(x) = y(x, 0) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} T_k(0) X_k(x)$$

$$(u_0, X_k)_{L^2([0,L])} = T_k(0)$$

$$v_0(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} T_k'(0) X_k(x)$$

$$(v_0, X_k)_{L^2([0,L])} = T_k'(0)$$

Au final, la solution est donc donnée par :

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(T_k(0)\cos\left(\frac{k^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}t\right) + \frac{L^2}{k^2\pi^2}\sqrt{\frac{\rho S}{EI}}T_k'(0)\sin\left(\frac{k^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}t\right)\right)$$

La majoration

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sup_{x,t}|X_k T_k| \leqslant \sqrt{\frac{2}{L}}\left(|T_k(0)| + \frac{L^2}{k^2\pi^2}\sqrt{\frac{\rho S}{EI}}|T_k'(0)|\right)$$

permet de conclure à la convergence de la série de fonctions grâce à la convergence des séries numériques en $t = 0$.

La figure 6.2 représente les trois premiers modes (normalisés) de vibration de la poutre.

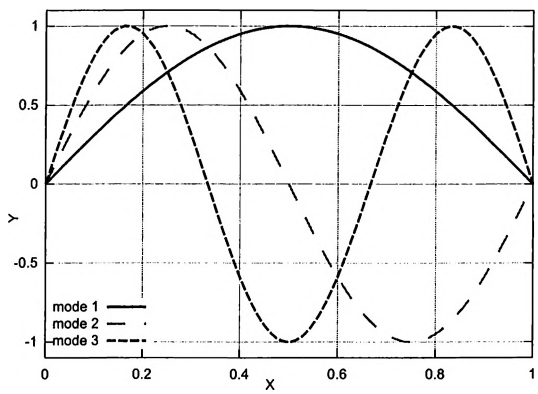


Figure 6.2 - Les 3 premiers modes de vibration de la poutre

6.2 1. (a) Le problème étant à symétrie circulaire, on a $\forall t > 0\ r \in [0,a]\ \forall \phi$: $z(t;z,\phi + 2\pi) = z(t;r,\phi)$. Donc $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$, la fonction est 2π-périodique.

(b) On a :

$$\Delta z = T(t)\left(R''(r)\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\,\Phi''(\varphi)\right)$$
$$= \frac{1}{c^2}T''(t)\,R(r)\,\Phi(\varphi)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

La solution étant non identiquement nulle, il existe un domaine $[r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [t_1, t_2]$ où R, Φ et T ne s'annulent pas. Sur ce domaine, on peut écrire :

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

Le membre de gauche ne dépend que des variables r et ϕ, et celui de droite de la variable t uniquement ; il existe donc une constante λ telle que :

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

S'il existe un réel φ_0 en lequel Φ s'annule, la non-nullité des autres fonctions sur $[r_1, r_2]$ et $[t_1, t_2]$ implique $\Phi''(\varphi_0) = 0$. La relation

$$R''(r)\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}\,\Phi''(\varphi) = -\lambda\,\Phi(\varphi)$$

est donc vérifiée pour tout $\phi \in [0, 2\pi]$.

De même, on montre que l'équation est valable sur tout $r \in [0, a]$.

Le problème spatial s'écrit :

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable r, et celui de droite de la variable φ uniquement ; il existe donc une constante μ telle que :

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu \ , \ \mu \in \mathbb{R}$$

d'où le système spatial découplé annoncé.

(c) Grâce aux résultats démontrés plus haut, on a donc, pour tout φ de $[0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu\,\Phi(\varphi) = 0 & \forall \varphi \in]0, 2\pi[\\ \Phi \ \ 2\pi \text{ périodique} \end{cases}$$

Il est nécessaire de discuter en fonction du signe de μ

- $\mu = 0$ alors $\Phi = \alpha\phi + \beta$ et la périodicité impose $\alpha = 0$. La valeur propre 0 donne donc une fonction propre constante (mode axisymétrique) :

$$\mu = 0 \ \Rightarrow \ \Phi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

- si $\mu < 0$ la solution fait apparaître des fonctions exponentielles réelles qui ne peuvent satisfaire la périodicité.

– si $\mu = \omega^2 > 0$ avec $\omega > 0$. Les solutions sont alors de la forme :

$$\Phi(\varphi) = \alpha \cos(\omega\varphi) + \beta \sin(\omega\varphi)$$

La 2π périodicité implique $\omega \in \mathbb{N}^*$. α et β sont alors arbitraires. On obtient donc deux fonctions propres que l'on orthonormalise :

$$n \in \mathbb{N}^* \qquad \Phi_n(\phi) = \sqrt{2}\cos(n\varphi) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Phi}_n(\varphi) = \sqrt{2}\sin(n\phi)$$

(d) Pour tout entier naturel n, grâce aux résultats précédents, on a :

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = n^2$$

On y ajoute la condition limite en a et la considération physique que R doit être continu et borné en 0, R est alors solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[r\dfrac{dR}{dr}\right] + \left(\lambda - \dfrac{n^2}{r^2}\right) R(r) = 0 \\ R(a) = 0 \\ R(0) < \infty \end{cases}$$

D'après l'énoncé, pour n fixé, les solutions sont discrètes (indicées par $p \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{cases} \lambda_{n,p} = \left(\dfrac{s_{n,p}}{a}\right)^2 \\ r \mapsto R_{n,p}(r) = J_n\left(s_{n,p}\dfrac{r}{a}\right) \end{cases}$$

Les premiers modes de la membranes sont représentés sur les figures 6.3, 6.4, 6.5, 6.6.

2. On cherche alors la solution sous la forme :

$$(t; r, \varphi) \mapsto z(t; r, \varphi) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} R_{n,p}(r)\left(\Phi_n(\varphi)T_{n,p}(t) + \tilde{\Phi}_n(\varphi)\tilde{T}_{n,p}(t)\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On injecte cette forme dans l'*EDP* :

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\
&= \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} T_{n,p}\left(R''_{n,p}\,\Phi_n + \frac{1}{r}R'_{n,p}\,\Phi_n + \frac{1}{r^2}R_{n,p}\,\Phi''_n\right) - \frac{1}{c^2}T''_{n,p}R_{n,p}\Phi_n \\
&\qquad + \tilde{T}_{n,p}\left(R''_{n,p}\,\tilde{\Phi}_n + \frac{1}{r}R'_{n,p}\,\tilde{\Phi}_n + \frac{1}{r^2}R_{n,p}\,\tilde{\Phi}''_n\right) - \frac{1}{c^2}\tilde{T}''_{n,p}R_{n,p}\tilde{\Phi}_n \\
&= \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} T_{n,p}\left(R''_{n,p}\,\Phi_n + \frac{1}{r}R'_{n,p}\,\Phi_n - \frac{1}{r^2}R_{n,p}\,n^2\Phi_n\right) - \frac{1}{c^2}T''_{n,p}R_{n,p}\Phi_n \\
&\qquad + \tilde{T}_{n,p}\left(R''_{n,p}\,\tilde{\Phi}_n + \frac{1}{r}R'_{n,p}\,\tilde{\Phi}_n - \frac{1}{r^2}R_{n,p}\,n^2\tilde{\Phi}_n\right) - \frac{1}{c^2}\tilde{T}''_{n,p}R_{n,p}\tilde{\Phi}_n \\
&= \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} R_{n,p}\left(\Phi_n(-\lambda_{n,p}T_{n,p} - \frac{1}{c^2}T''_{n,p}) + \tilde{\Phi}_n(-\lambda_{n,p}\tilde{T}_{n,p} - \frac{1}{c^2}\tilde{T}''_{n,p})\right)
\end{aligned}$$

$\left(R_{n,p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ et $\left(\Phi_n, \tilde{\Phi}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant des bases, on a :

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \qquad 0 = c^2\lambda_{n,p}T_{n,p} + T''_{n,p}$$

$$T_{n,p}(t) = T_{n,p}(0)\cos(c\sqrt{\lambda_{n,p}}t) + \frac{1}{c\sqrt{\lambda_{n,p}}}T'_{n,p}(0)\sin(c\sqrt{\lambda_{n,p}}t)$$

et de même pour les $\tilde{T}_{n,p}$.

Les constantes sont déterminées en projetant les conditions initiales :

$$\begin{aligned}
f(r,\varphi) &= z(t=0;r,\varphi) \\
&= \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} R_{n,p}(r)\left(\Phi_n(\varphi)T_{n,p}(0) + \tilde{\Phi}_n(\varphi)\tilde{T}_{n,p}(0)\right)
\end{aligned}$$

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \qquad T_{n,p}(0) = \left((f,\Phi_n)_{L^2([0,2\pi])}\right)_{L^2_r([0,a])}$$

$$\tilde{T}_{n,p}(0) = \left(\left(f,\tilde{\Phi}_n\right)_{L^2([0,2\pi])}\right)_{L^2_r([0,a])}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial z}{\partial t}(t=0;r,\varphi) \\
&= \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} R_{n,p}(r)\left(\Phi_n(\varphi)T'_{n,p}(0) + \tilde{\Phi}_n(\varphi)\tilde{T}'_{n,p}(0)\right)
\end{aligned}$$

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \qquad T'_{n,p}(0) = \tilde{T}'_{n,p}(0) = 0$$

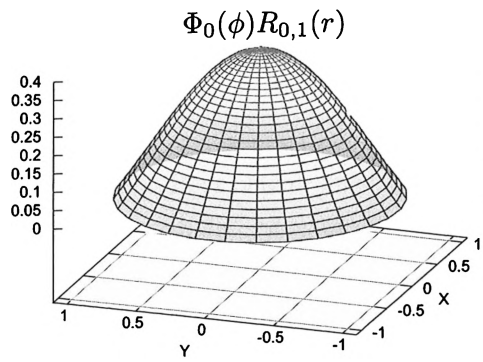


Figure 6.3 - Mode(0,1) du tambour

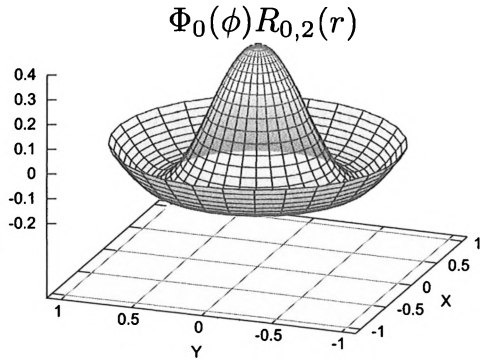


Figure 6.4 - Mode(0,2) du tambour

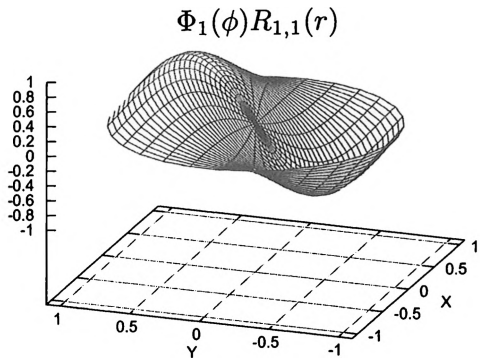


Figure 6.5 - Mode(1,1) du tambour

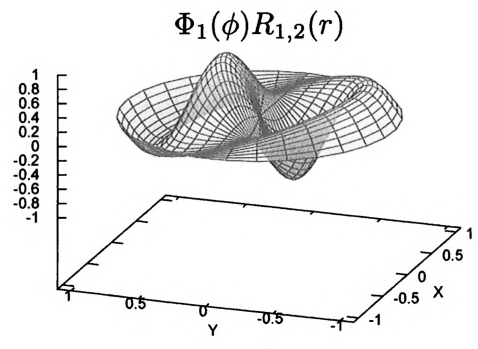


Figure 6.6 - Mode(1,2) du tambour

6.3 1. On injecte la forme séparée $u(x, t) = U(X)\,T(t)$ dans $(\mathcal{E})$:

$$X\,T'' = x^2\,X''\,T + 3\,x\,X'\,T$$

puis :

$$\frac{x^2\,X'' + 3\,x\,X'}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Les conditions aux limites conduisent à :

$$X(1) = X(e) = 0$$

3. On pose $x = e^z$ et $X(x) = Z(z)$

$$X' = \frac{dz}{dx}Z' = \frac{Z'}{x}$$

$$X'' = \frac{d^2z}{dx^2}Z' + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 Z'' = -\frac{Z'}{x^2} + \frac{Z''}{x^2}$$

$$x^2\,X'' + 3\,x\,X' - \lambda X = Z'' + 2Z' - \lambda Z$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

4.
$$Z(0) = Z(1) = 0$$

5. L'équation caractéristique de $(\mathcal{E}_Z)$ est donnée par :
$$0 = r^2 + 2r - \lambda$$
Son discriminant réduit est :
$$1 + \lambda$$

(a) Dans le cas où $1 + \lambda = \omega^2 > 0$, les deux racines réelles distinctes sont
$$r = -1 \pm \omega$$
ce qui conduit à :
$$Z(z) = e^{-z}\left(A\,e^{\omega z} + B\,e^{-\omega z}\right)$$
où A et B sont deux constantes réelles.
Les conditions aux limites imposent alors :
$$Z(0) = A + B = 0$$
$$Z(1) = e^{-1}\left(A\,e^{\omega} + B\,e^{-\omega}\right) = 0$$
ce qui conduit nécessairement à $A = B = 0$ et il n'existe pas de solution non triviale.

(b) Dans le cas où $1 + \lambda = \omega^2 = 0$, la racine double est $r = -1$, ce qui conduit à :
$$Z(z) = e^{-z}\left(A + B\,z\right)$$
où A et B sont deux constantes réelles.
Les conditions aux limites imposent alors :
$$Z(0) = A = 0$$
$$Z(1) = e^{-1}\left(A + B\right) = 0$$
ce qui conduit nécessairement à $A = B = 0$ et il n'existe pas de solution non triviale.

(c) i. Dans le cas où $1 + \lambda = -\omega^2 < 0$, les deux racines complexes distinctes sont
$$r = -1 \pm i\,\omega$$
ce qui conduit à :
$$Z(z) = e^{-z}\left(A\,\cos(\omega z) + B\,\sin(\omega z)\right)$$
où A et B sont deux constantes réelles.

ii. Les conditions aux limites imposent alors :

$$Z(0) = A = 0$$
$$Z(1) = e^{-1}\ (B\ \sin(\omega)) = 0$$

Pour obtenir une solution non triviale on doit donc avoir :

$$\sin(\omega) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{N}^*$$

Il en résulte :

$$Z_k(z) = B_k\, e^{-z}\ \sin(k\pi z)$$

iii.

$$X_k(x) = Z_k(z) = Z_k(\ln x) = \frac{B_k}{x}\ \sin(k\pi\ \ln x)$$

les (X_k) forment une base hilbertienne de $L^2_x([1, e])$, ils sont orthogonaux au sens du produit scalaire associé :

$$\text{pour } k \neq k', \qquad (X_k, X_{k'})_{L^2_x([1,e])} = \int_1^e x X_k X_{k'} dx = 0$$

Les vecteurs sont normalisés en choisissant

$$B_k = \sqrt{2}$$

On peut retrouver le bon espace en mettant le problème de Sturm Liouville sous forme canonique :

$$\mathcal{SL}(X) : x \mapsto x^2X'' + 3xX' = \frac{1}{x}\left((x^3X')'\right)$$

et on identifie $p(x) = x^3$, $q = 0$, $s(x) = x$.

iv. En injectant la forme $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} X_k T_k$ dans $(\mathcal{E})$, on obtient :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} T_k'' X_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} (x^2X_k'' + 3xX_k')T_k = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \lambda_k X_k T_k$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} (T_k'' - \lambda_k T_k)X_k = 0$$

L'indépendance linéaire des X_k conduit alors à :

$$T_k'' - \lambda_k\, T_k = T_k'' + (1 + k^2\pi^2)\, T_k = 0$$

de solution générale :

$$T_k(t) = T_k(0)\ \cos\left(\sqrt{1 + k^2\pi^2}\, t\right) + \frac{T_k'(0)}{\sqrt{1 + k^2\pi^2}}\ \sin\left(\sqrt{1 + k^2\pi^2}\, t\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

v. Les $(T_k(0))$ et $(T'_k(0))$ sont déterminés à l'aide des conditions initiales. La première condition initiale $(u(x,0) = 0)$ impose directement $\forall k \in \mathbb{N}^*, T_k(0) = 0$.
La deuxième condition initiale impose ensuite :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} T'_k(0) X_k(x) = f(x)$$

On projette cette équation sur la base hilbertienne

$$T'_k(0) = (X_k, f)_{L^2_x([1,e])}$$

Au final :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{\sin(k\pi \ln(x)) \sin\left(\sqrt{1+k^2\pi^2}\, t\right)}{x}$$

$$c_k = 2\frac{\int_1^e \sin(k\pi \ln(y)) f(y) dy}{\sqrt{1+k^2\pi^2}}$$

6.4 On commence par rendre homogènes les conditions aux limites en cherchant un relèvement (le domaine prismatique suggère une fonction affine de x) :

$$U(x,t) = u_0\left(e^{-\alpha t}(1-\frac{x}{l}) + \frac{x}{l}e^{-\beta t}\right)$$

U est régulier et vérifie les conditions aux limites.

On pose ensuite $v = u - U$.

v est solution de :

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + bv + \frac{\partial v}{\partial t} = -\left(a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + bU + \frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

$$= u_0\left((b-\alpha)e^{-\alpha t}(1-\frac{x}{l}) + (b-\beta)\frac{x}{l}e^{-\beta t}\right)$$

et doit satisfaire les conditions :

$$v(0,t) = v(l,t) = 0 \qquad \forall t > 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} v = \lim_{t\to+\infty} u - U = 0 \qquad \forall x \in]0, l[$$

On injecte la forme à variables séparées dans l'équation homogène $v = XT$:

$$a\frac{X''}{X} = -b - \frac{T'}{T} = \lambda$$

La discussion usuelle sur les conditions aux limites conduit à la base hilbertienne suivante :

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)$$

On injecte enfin la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n T_n$ dans l'*EDP* :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\left(b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}\right)T_n+T_n'\right)X_n = u_0\left((b-\alpha)e^{-\alpha t}\left(1-\frac{x}{l}\right)+(b-\beta)\frac{x}{l}e^{-\beta t}\right)$$

On projette alors le second membre sur la base : il faut donc calculer les projections de $x\mapsto 1$ et $x\mapsto \frac{x}{l}$:

$$(X_n,1)_{L^2([0,l])} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)dx = \frac{\sqrt{2l}}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$\left(X_n,\frac{x}{l}\right)_{L^2([0,l])} = \frac{\sqrt{2}}{l\sqrt{l}}\int_0^l \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)xdx = \frac{\sqrt{2l}}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

La projection conduit donc, pour tout entier naturel n, à :

$$\left((b-\frac{an^2\pi^2}{l^2})T_n+T_n'\right) = u_0\frac{\sqrt{2l}}{n\pi}\left((b-\alpha)e^{-\alpha t}+(b-\beta)(-1)^{n+1}e^{-\beta t}\right)$$

Par hypothèse : $b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}<0$, ce qui donnerait une exponentielle croissante en solution du problème homogène, incompatible avec l'hypothèse de solution nulle à l'infini.

On cherche donc une solution particulière qui tend vers 0 en l'infini, et donc :

$$T_n(t) = u_0\frac{\sqrt{2l}}{n\pi}\left(\frac{b-\alpha}{b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}-\alpha}e^{-\alpha t}+(-1)^{n+1}\frac{b-\beta}{b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}-\beta}e^{-\beta t}\right)$$

ce qui conduit à :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_0\frac{2}{n\pi}\left(\frac{b-\alpha}{b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}-\alpha}e^{-\alpha t}+(-1)^{n+1}\frac{b-\beta}{b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}-\beta}e^{-\beta t}\right)\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)$$

Étant donné que le second membre est C^1, on a convergence uniforme des séries spatiales.

Par ailleurs, les $|T_n|$ sont bornés et décroissants (pour n croissant) ; il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions de (x,t) sur tout segment temporel.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

7 QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES CLASSIQUES

Ce chapitre a pour objectif d'utiliser les outils précédemment exposés pour étudier des équations classiques de la physique.

7.1 ÉQUATION DE TRANSPORT

On reprend l'étude de l'équation de transport introduite à la section 1.2.1

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + c(x)\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \qquad (\mathcal{E}_T)$$

Plus précisément, on s'intéresse, au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + c(x)\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ \mu(x,0) = \mu_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (7.1)$$

où la célérité c et la condition initiale μ_0 sont des fonctions données de l'espace, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Le fait que la célérité ne dépende pas de μ fait qu'une première famille d'intégrales premières est constituée de nappes parallèles à l'axe des ordonnées (Oz), l'équation dans le plan (x, t) pouvant se déterminer indépendamment de la solution. De plus, l'absence de second membre fait que les plans z = Constante constituent la seconde famille de surfaces intégrales.

Les courbes caractéristiques sont donc des lignes sur lesquelles la solution est constante. Le système caractéristique de $(\mathcal{E}_T)$, qui permet de déterminer la projection des caractéristiques dans le plan (x, t), est donné par :

$$\frac{dx}{c(x)} = \frac{dt}{1} \qquad (7.2)$$

En dérivant la solution le long d'une caractéristique, on retrouve bien la conservation de la concentration :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu(x(t),t)) &= \frac{\partial \mu}{\partial t}(x(t),t) + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \mu}{\partial x}(x(t),t) \\ &= \frac{\partial \mu}{\partial t}(x(t),t) + c(x(t))\frac{\partial \mu}{\partial x}(x(t),t) \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (7.3)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Pour calculer la solution en un point donné (x_d, t_d), il suffit donc de déterminer la caractéristique qui passe par ce point C_d, de trouver la coordonnée initiale de cette caractéristique $(x_d^0, 0) \in C_d$ (autrement dit le pied de la caractéristique) ; on obtiendra alors :

$$\mu(x_d, t_d) = \mu_0(x_d^0)$$

Il est à noter que cette méthode est une ***méthode locale***.

7.1.1 Cas où la célérité est constante

Cas d'un domaine non borné

Les courbes caractéristiques C_T ont pour équation :

$$x - c\,t = \text{Constante}$$

Ce sont des droites parallèles les unes aux autres.

Pour un point (x_d, t_d) donné, le pied de la caractéristique passant par ce point est donc $x_d^0 = x_d - c\,t_d$.

Exemple 7.1

Considérons le cas suivant :

$$\mu_0(x) = e^{-x^2} \qquad \text{et} \qquad c = 1$$

La solution est alors de la forme :

$$\mu(x, t) = \mu_0(x - t)$$

La figure 7.1 représente la surface solution sur laquelle on a représenté la condition initiale, un ensemble de courbes caractéristiques et pour l'une d'entre elle des intégrales premières associées.

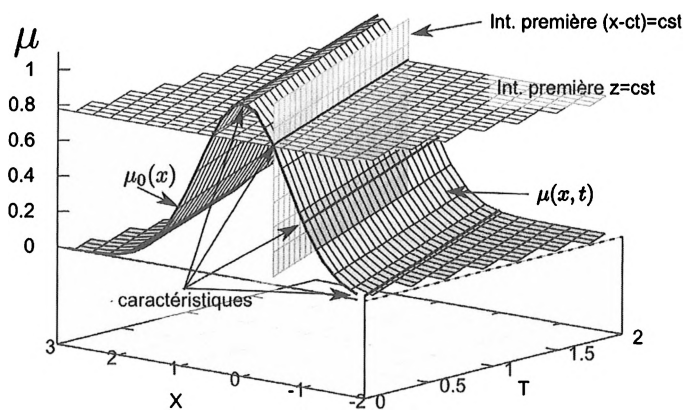


Figure 7.1- Solution de l'équation de transport avec célérité constante

Cas d'un domaine semi-borné

On considère désormais le cas où $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial t} + c\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0 & x \geqslant 0,\ t \in \mathbb{R}^+ \\ \mu(x,0) = \mu_0(x) & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

i. Cas d'une célérité positive

La figure 7.2 représente le réseau des droites caractéristiques, qui est donné par $x - c\,t = Constante$.

Il est clair que, pour un point (x, t) tel que $x - ct < 0$, la caractéristique passant par le point sort du domaine d'étude par la ligne $x = 0$ et non sur la ligne de condition initiale $t = 0$.

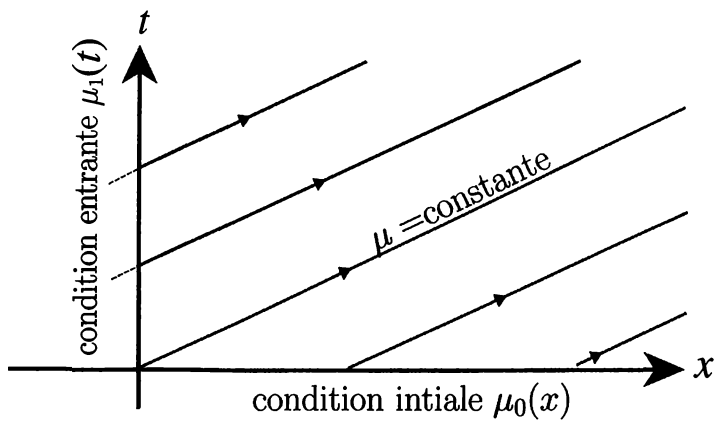


Figure 7.2 - Les caractéristiques de l'équation de transport de l'équation de transport dans le domaine $x \geqslant 0$, dans le cas d'une célérité constante positive

Il est donc nécessaire d'imposer une condition limite supplémentaire correspondant à la frontière $x = 0$, de la forme :

$$\mu(0, t) = \mu_1(t) \tag{7.5}$$

Physiquement, cela vient du fait que cette frontière $x = 0$ est celle par laquelle « l'information » entre dans le domaine considéré. Les caractéristiques sont dites « entrantes », μ se déplace de la gauche vers la droite, et sa valeur est déterminée par l'extérieur du domaine.

ii. Cas d'une célérité négative

La figure 7.3 représente le réseau des droites caractéristiques, qui est donné par $x - c\,t = Constante$: les caractéristiques sont dites « sortantes », μ se déplace de la droite vers la gauche.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

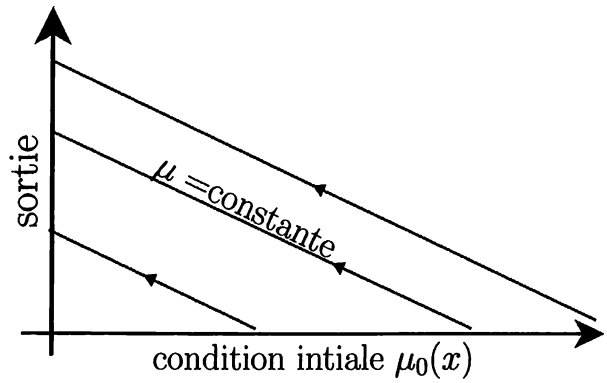


Figure 7.3 - Les caractéristiques de l'équation de transport de l'équation de transport dans le domaine $x \geqslant 0$, dans le cas d'une célérité constante négative

7.1.2 Cas où la célérité varie dans l'espace

Exemple 7.2

On considère le cas suivant :

$$\mu_0(x) = e^{-x^2} \qquad \text{et} \qquad c(x) = x$$

Les courbes caractéristiques $C_{\mathcal{T}}$ ont pour équation :

$$\ln(x) - t = \text{Constante}$$
$$xe^{-t} = \lambda \in \mathbb{R}$$

La projection des caractéristiques dans le plan (x, t) forme donc un réseau de lignes exponentielles.

Pour obtenir la valeur de la solution en (x_d, t_d), il suffit donc de déterminer le pied $(x_d^0, 0)$ de la caractéristique passant par ce point :

$$x_d^0 = x_d\, e^{-t_d}$$

La surface solution a donc pour équation :

$$\mu(x, t) = \mu_0(xe^{-t}) = e^{-x^2e^{-2t}}$$

La figure 7.4 montre la surface solution sur laquelle on a représenté la condition initiale, un ensemble de courbes caractéristiques et pour l'une d'entre elle des intégrales premières associées.

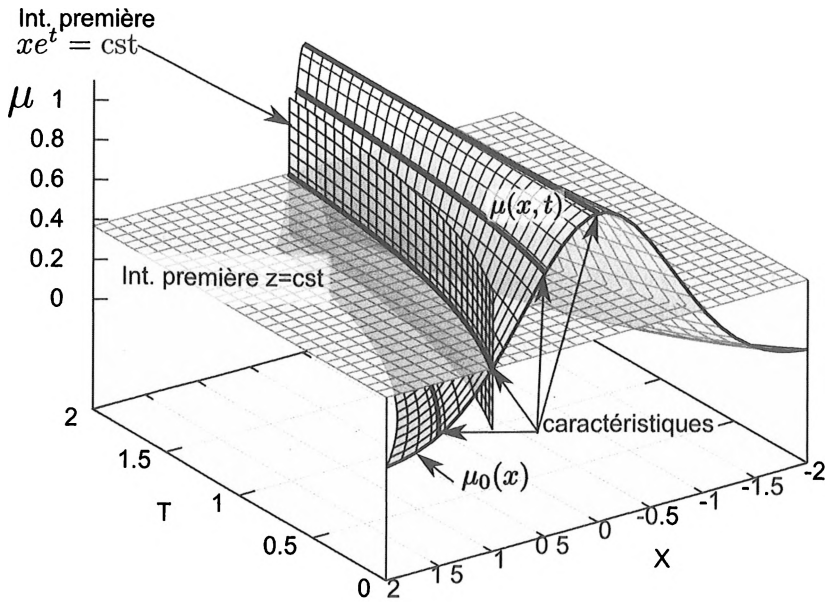


Figure 7.4 - Solution de l'équation du transport avec célérité variable

7.1.3 Équation de Burgers

On se place ici dans le cas où la célérité dépend de la valeur de la concentration. On passe donc à un problème quasi-linéaire. On va voir que de nombreuses difficultés apparaissent.

L'***équation de Burgers*** régit, notamment, les phénomènes de *turbulence*† :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \tag{7.6}$$

Un des intérêts de l'équation de Burgers est qu'elle peut s'écrire sous forme conservative :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{1}{2}\mu^2\right)}{\partial x} = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \tag{7.7}$$

Si on considère le problème de Cauchy avec condition initiale :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial t} + \dfrac{\partial \left(\frac{1}{2}\mu^2\right)}{\partial x} = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ \mu(x,0) = \mu_0(x) \end{cases} \tag{7.8}$$

†. Johannes Martinus Burgers (1895-1981), physicien hollandais.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

les caractéristiques $(x_c(s), t_c(s), \mu_c(s))$ sont obtenues par intégration de (voir (2.16)) :

$$\begin{cases} dx_c = \mu_c(x_c, t_c)\, ds \\ dt_c = 1\, ds \\ d\mu_c = 0\, ds \end{cases} \tag{7.9}$$

Le long d'une caractéristique, μ_c est donc conservé, et la caractéristique passant par (x_d, t_d) et $(x_d^0, 0)$ a pour équation :

$$(x_d - x_d^0) = \mu(x_d, t_d) t_d = \mu_0(x_d^0) t_d \tag{7.10}$$

Pour un point (x_d, t_d) donné, le pied de caractéristique x_d^0 est donc solution d'une équation qui dépend de μ_0.

Reprenons le cas où $\mu_0(x) = e^{-x^2}$; la caractéristique issue du point x_d^0 a pour équation :

$$x_c = x_d^0 + \mu_0(x_d^0)\, t = x_d^0 + e^{-x_d^{0\,2}}\, t_c \tag{7.11}$$

Dans le domaine où $e^{-x_d^{0\,2}}$ est très petit (pour $|x_d^0|$ suffisamment grand) les droites caractéristiques, quasiment verticales, sont parallèles ; par contre, dès que $e^{-x_d^{0\,2}}$ n'est plus négligeable devant 1, les caractéristiques ne sont plus parallèles et donc se croisent. La méthode des caractéristiques ne peut alors plus s'appliquer : si les caractéristiques de pied x_1 et x_2 se croisent en x_i, on devrait avoir $\mu(x_i) = \mu_0(x_1)$ et $\mu(x_i) = \mu_0(x_2)$ ce qui n'est pas possible dans notre cas.

Il y a apparition d'une *ligne de discontinuité*, ou ***onde de choc***.

Ce phénomène est représenté sur la figure 7.5 où on a tracé le réseau des caractéristiques, et où on peut observer les intersections.

Les croisements de caractéristiques engendrent donc des difficultés supplémentaires nécessitant des méthodes de résolution plus poussées. Ces phénomènes de croisement ne représentent qu'une partie des problèmes que l'on peut rencontrer lors de l'étude d'équations de transport non linéaires. La non-existence de solutions globales requiert donc des traitements adaptés.

7.2 ÉQUATION DES ONDES

L'équation des ondes en dimension d d'espace s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{7.12}$$

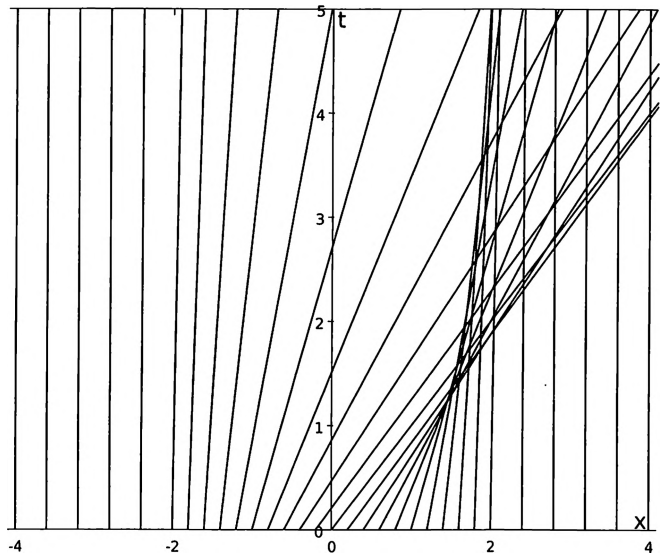


Figure 7.5 - Les caractéristiques de l'équation de Burgers dans le cas où $\mu_0(x) = e^{-x^2}$

c est la célérité, et u_0 et v_0 sont deux fonctions données sur $C^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $C^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ respectivement.
On suppose aussi, bien sûr, que u est deux fois dérivable en temps et en espace.

Définition 7.1

L'opérateur $\Box = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ est appelé *opérateur d'onde*, ou *d'alembertien.*

Pour la suite on étudie le cas unidimensionnel $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Théorème 7.1. ***Formule de d'Alembert***†

La fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *par :*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{u_0(x - c\,t) + u_0(x + c\,t)\} + \frac{1}{c}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} v_0(\tau)\,d\tau \qquad (7.13)$$

est solution de l'équation des ondes unidimensionnelle.

On propose trois techniques différentes pour démontrer cette formule

†. Jean le Rond d'Alembert, 1717-1783, mathématicien, philosophe et encyclopédiste français.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. *Par un changement de variables*

Le calcul des caractéristiques conduisant aux courbes

$$x \pm ct = \text{Constante}$$

on introduit le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases} \quad \text{et} \quad u(x,t) = \tilde{u}(\xi,\eta) \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta)$$

L'équation des ondes devient donc :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta) = 0 \tag{7.15}$$

D'où :

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

Par suite :

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{7.16}$$

Il suffit ensuite d'exploiter les données de Cauchy :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) & = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = c(-f'(x) + g'(x)) & = v_0(x) \end{cases}$$

ce qui implique :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} f'(x) + g'(x) & = u_0'(x) \\ c(-f'(x) + g'(x)) & = v_0(x) \end{cases}$$

La résolution du système linéaire en $f'(x)$, $g'(x)$ conduit alors à :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{2}\left\{u_0'(x) - \dfrac{1}{c} v_0(x)\right\} \\ g'(x) = \dfrac{1}{2}\left\{u_0'(x) + \dfrac{1}{c} v_0(x)\right\} \end{cases}$$

D'où :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\, u_0(x) - \dfrac{1}{2c} \int_0^x v_0(\tau)\, d\tau + C \\ g(x) = \dfrac{1}{2}\, u_0(x) + \dfrac{1}{2c} \int_0^x v_0(\tau)\, d\tau - C \end{cases}$$

où C est une constante réelle.

La solution de l'équation des ondes unidimensionnelle est donc donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} v_0(\tau)\, d\tau - \int_0^{x-ct} v_0(\tau)\, d\tau\right) \quad \blacksquare$$

Démonstration. *Par transformée de Fourier*

On suppose que u et toutes ses dérivées admettent des transformées de Fourier en espace à tout instant t.

On a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\hat{u}}{dt^2}(\xi,t) = c^2\,\xi^2\,\hat{u}(\xi,t) = 0 & \forall \xi \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x}(\xi,0) = \hat{v}_0(\xi) & \forall\, \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par intégration, on en déduit :

$$\hat{u}(\xi,t) = K_1(\xi)\, e^{ic\xi t} + K_2(\xi)\, e^{-ic\xi t}$$

où les fonctions K_1 et K_2 sont déterminées grâce aux conditions de Cauchy, qui s'écrivent alors :

$$\begin{cases} K_1(\xi) + K_2(\xi) = \hat{u}_0(\xi)\ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \\ i\xi\,(K_1(\xi) - K_2(\xi)) = \hat{v}_0(\xi)\ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} K_1(\xi) = \dfrac{1}{2}\,\hat{u}_0(\xi) + \dfrac{1}{2i\xi}\,\hat{v}_0(\xi)\ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \\ K_2(\xi) = \dfrac{1}{2}\,\hat{u}_0(\xi) - \dfrac{1}{2i\xi}\,\hat{v}_0(\xi)\ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi,t) &= \left\{\frac{1}{2}\,\hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{2ic\xi}\,\hat{v}_0(\xi)\right\} e^{ic\xi t} + \left\{\frac{1}{2}\,\hat{u}_0(\xi) - \frac{1}{2ic\xi}\,\hat{v}_0(\xi)\right\} e^{-ic\xi t} \\ &= \frac{1}{2}\,\hat{u}_0(\xi)\left(e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}\right) + \frac{\hat{v}_0(\xi)}{2ic\xi}\left(e^{ic\xi t} - e^{-ic\xi t}\right) \\ &= \hat{v}_0(\xi)\cos(c\,\xi\, t) + \frac{\hat{v}_0(\xi)}{c\xi}\sin(c\xi t) \end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Cette dernière forme montre que la transformée de Fourier admet bien une limite finie en 0.

La formule d'inversion de Fourier conduit alors à :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2}\hat{u}_0(\xi)\left(e^{ic\xi t}+e^{-ic\xi t}\right)+\frac{\hat{v}_0(\xi)}{2ic\xi}\left(e^{ic\xi t}-e^{-ic\xi t}\right)\right]e^{ix\xi}\,d\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2}\hat{u}_0(\xi)\left(e^{i\xi(x+ct)}+e^{-i\xi(x-ct)}\right)+\frac{\hat{v}_0(\xi)}{2ic\xi}\left(e^{i\xi(x+ct)}-e^{-i\xi(x-ct)}\right)\right]d\xi$$

Les deux premières intégrales donnent respectivement $u_0(x+ct)$ et $u_0(x-ct)$.

Les deux derniers termes conduisent à une primitive de v_0 en $x+ct$ et $x-ct$ respectivement.

On retrouve donc bien la formule de d'Alembert. ■

Démonstration. *Par découplage*

En utilisant la factorisation suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right\} \tag{7.17}$$

l'équation des ondes apparaît comme un système de deux équations de transport couplées.

On pose $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $u_2 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, le système peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial t}\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{7.18}$$

On pose

$$U = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \qquad A = -\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad U_0 = \begin{pmatrix}v_0\\u_0'\end{pmatrix}$$

Le système s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial t} + cA\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad \text{avec} \qquad U(t=0) = U_0$$

On diagonalise la matrice

$$A = PDP^{-1}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

On pose :

$$V = P^{-1}U \qquad V_0 = P^{-1}U_0$$

V est solution de :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + cD\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad \text{avec} \qquad V(t=0) = V_0$$

Les fonctions v_1 et v_2 sont respectivement solution des problèmes de transport :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + c\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = 0 & \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ v_1(x,0) = v_{1,0}(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_2}{\partial t} - c\dfrac{\partial v_2}{\partial x} = 0 & \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ v_2(x,0) = v_{2,0}(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \qquad \begin{cases} v_1(x,t) = v_{1,0}(x - c\,t) \\ v_2(x,t) = v_{2,0}(x + c\,t) \end{cases}$$

De :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} v_{1,0}(x) = \dfrac{1}{2}\left\{-v_0(x) + c\,u_0'(x)\right\} \\ v_{2,0}(x) = \dfrac{1}{2}\left\{v_0(x) + c\,u_0'(x)\right\} \end{cases}$$

on déduit :

$$\begin{cases} v_1(x,t) = \dfrac{1}{2}\left\{-v_0(x - c\,t) + c\,u_0'(x - c\,t)\right\} & \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ v_2(x,t) = \dfrac{1}{2}\left\{v_0(x + c\,t) + c\,u_0'(x + c\,t)\right\} & \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \end{cases}$$

Enfin, comme :

$$U(x,t) = P\,V(x,t)$$

il résulte :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= u_1(x,t) \\ &= -\frac{c}{2}u_0'(x - c\,t) + \frac{c}{2}u_0'(x + c\,t) + \frac{1}{2}v_0(x + c\,t) + \frac{1}{2}v_0(x - c\,t) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{u_0(x + c\,t) + u_0(x - c\,t)\right\} \\ + \frac{1}{2c}\int_0^{x+c\,t} v_0(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2c}\int_0^{x-c\,t} v_0(\xi)\,d\xi + C(x) \end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

où C est une fonction à déterminer grâce à la donnée initiale, qui s'écrit alors :

$$u(x, 0) = u_0(x) + C(x) = u_0(x)$$

C est donc identiquement nulle. On retrouve bien la formule de d'Alembert. ■

Remarque 7.1

La formule de D'Alembert met en évidence deux classes de solutions :

i. la première, se propageant à la vitesse c (et donc liée au terme $u(x - c\,t)$ et à la valeur propre c) ;

ii. la seconde, se propageant à la vitesse $-c$ (et donc liée au terme $u(x + c\,t)$ et à la valeur propre $-c$).

Remarque 7.2

Ce type d'équation, avec une vitesse finie de propagation, induit des propriétés remarquables pour la solution, en termes de dépendance par rapport aux données de Cauchy : de par la formule de d'Alembert, la solution évaluée en x à l'instant t ne dépendra que des valeurs de u_0 et u_1 sur l'intervalle $[x - ct, x + ct]$ appelé *domaine de dépendance* de (x, t), et noté $D_{x,t}$. De façon parfaitement symétrique, la donnée de Cauchy en un point x_0 sera mise à contribution pour le calcul de la solution dans le cône

$$C_{x_0} = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : |x - x_0| \leqslant c\,t\}$$

appelé *domaine d'influence* de x_0.

7.3 ÉQUATION DE LA CHALEUR

On s'intéresse ici au problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \alpha\,\Delta u = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{7.19}$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre donné, et où u_0 est une fonction donnée, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$.

De par la forme de l'équation, il est naturel de chercher une solution de classe C^1 en temps, et C^2 en espace.

En supposant que u et toutes ses dérivées admettent à tout instant des transformées de Fourier, on en déduit :

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(\xi, t) = -\alpha\,\|\xi^2\|\,\hat{u}(\xi, t)$$

avec la donnée initiale

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi)$$

On a donc, à tout instant t :

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\alpha \|\xi^2\| t}\, \hat{u}_0(\xi)$$

La formule d'inversion de Fourier donne alors :

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1} \hat{u}_0(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1} \left\{ e^{-\alpha \|\xi^2\| t}\, \hat{u}_0(\xi) \right\}$$

$$= \mathcal{F}_x^{-1} \left\{ e^{-\alpha \|\xi^2\| t} \right\} * \mathcal{F}_x^{-1} \{\hat{u}_0(\xi)\} = \mathcal{F}_x^{-1} \left\{ e^{-\alpha \|\xi^2\| t} \right\} * u_0(x)$$

avec :

$$\mathcal{F}_x^{-1} \left\{ e^{-\alpha \|\xi^2\| t} \right\} = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha t}}$$

D'où, finalement :

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}}\, u_0(x-y)\, dy$$

Remarque 7.3

La valeur de la solution en un point x de $\mathbb{R}^d$ dépend de toutes les valeurs de la donnée de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$.
De plus, pour des petites valeurs de t, seuls les points proches de x joueront un rôle important.

Définition 7.2

La fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha t}} \tag{7.20}$$

est appelée ***noyau de la chaleur*** sur $\mathbb{R}^d$.

On voit que la solution est obtenue par convolution spatiale du noyau de la chaleur avec le second membre.

Remarque 7.4

La présence du terme exponentiel permet, même lorsque la donnée de Cauchy u_0 n'est pas régulière, d'obtenir une fonction u de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^d \times]0, +\infty[$. C'est ***l'effet régularisant*** de l'opérateur de la chaleur.
Par contre, cela entraîne l'*irréversibilité* de l'évolution de la solution, dans la mesure où la solution à un instant $t > 0$ est infiniment plus régulière que la donnée initiale.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

7.4 Équation de Laplace

L'équation de Laplace $\Delta u = 0$, *fut ainsi nommée en hommage au mathématicien et physicien Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Introduite, à l'origine, en mécanique newtonienne, elle apparaît également en astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique, etc.*

Dans ce qui suit, u désigne *a priori* une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$, dont on affinera les propriétés par la suite.

On commence par étudier les propriétés de l'opérateur de Laplace avant de déduire les propriétés des solutions de cette équation et donner une illustration plus précise dans le cas de l'équation sur un disque.

7.4.1 Opérateur de Laplace

Proposition 7.2. ***Invariance par transformation euclidienne***

Soit T une isométrie affine de $\mathbb{R}^d$:

$$(\Delta(u \circ T^{-1}))(T(x)) = (\Delta u)(x) \tag{7.21}$$

Démonstration. Si T est une isométrie affine, alors, pour tout x de $\mathbb{R}^d$ (identifié à son rayon vecteur) :

$$T(x) = Rx + t$$

où R est une matrice orthogonale ($R^T R = I$) et t est une translation.

En différentiant, on en déduit :

$$dT = R \ , \ d^2T = 0$$

On pose alors : $\tilde{x} = T(x)$ et $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(x)$.

En utilisant les notations indicielles, on obtient, pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 x_j}{\partial \tilde{x}_i^2}$$

D'après ce qui précède :

$$\frac{\partial^2 x_j}{\partial \tilde{x}_i^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i} = \sum_i r_{ik} r_{ij} = \delta_{jk}$$ ■

Étant donné que le laplacien est invariant par rotation, on a souvent intérêt à utiliser des coordonnées polaires.

Définition 7.3

Soit Σ la **sphère unité** de $\mathbb{R}^d$:

$$\Sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^d / |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = 1 \right\}$$

La ***mesure superficielle*** de Σ est $d\sigma$ telle que $dx = dr\, dS = dr\, r^{d-1} d\sigma$.
On note $\Sigma_d = \int_\Sigma d\sigma$ la surface de la sphère unité.
La boule unité a alors pour volume $\dfrac{\Sigma_d}{d}$.
Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $x = r\sigma$ où $r = |x| \in \mathbb{R}^+$ et $\sigma = \dfrac{x}{|x|} \in \Sigma$.
(r, σ) forment les **coordonnées polaires** de x

Proposition 7.3. ***Laplacien d'une fonction radiale***

Une fonction u est **radiale** *si elle ne dépend que de r, son laplacien vaut alors :*

$$\Delta u(r) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r) = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)(r) \tag{7.22}$$

Démonstration. On pose : $u(x) = v(r)$, on a $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}\left(\dfrac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{r} \\ \dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{x_i^2}{r^3} \end{cases}$$

■

Remarque 7.5

Dans le cas $n = 3$:

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r^2}(r)$$

Dans de nombreux problèmes, il est intéressant d'étudier comment le problème se comporte en moyenne sur la sphère de rayon r.

Définition 7.4 Radialisation

On appelle ***radialisée*** de la fonction u la fonction $\tilde{u}$ telle que :

$$\tilde{u}(r) = \int_\Sigma u(r\sigma) d\sigma \tag{7.23}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Proposition 7.4. *La radialisation commute avec le laplacien :*

$$\Delta\tilde{u} = \widetilde{\Delta u} = \int_{\Sigma} (\Delta u)(r\sigma)d\sigma \tag{7.24}$$

Démonstration. soit v défini par : $v(r) = \int_{\Sigma} u(r\sigma)d\sigma$.

Ainsi : $\tilde{u}(x) = v(|x|)$, et :

$$\Delta\tilde{u}(x) = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{d-1}\frac{dv}{dr}\right)(|x|)$$

On peut supposer u définie sur $\mathbb{R}^d$; on a alors :

$$\frac{dv}{dr}(r) = \int_{\Sigma} \text{grad}(u).\sigma d\sigma = \frac{1}{r^{d-1}}\int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{r^{d-1}}\int_{B(0,r)} \Delta u dx$$

puis :

$$r^{d-1}\frac{dv}{dr}(r) = \int_{B(0,r)} \Delta u dx = \int_{s=0}^{r} s^{d-1}\int_{\Sigma} (\Delta u)(s\sigma)d\sigma\, ds$$

et donc

$$r^{d-1}\Delta v = \frac{d}{dr}\left(r^{d-1}\frac{dv}{dr}(r)\right) = r^{d-1}\int_{\Sigma} (\Delta u)(r\sigma)d\sigma \qquad \blacksquare$$

À l'opposé des fonctions radiales, on trouve les fonctions sphériques.

Définition 7.5

Une fonction est ***sphérique*** si elle ne dépend que de σ.

Une fonction sphérique est naturellement invariante par homothétie, en particulier si une fonction u est sphérique, alors comme $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial^2}{r^2\partial\sigma_i^2}$ on a $\Delta u(x) = \dfrac{1}{r^2}(\Delta u)(\sigma)$.

Définition 7.6

On appelle ***laplacien sur la sphère*** ou ***opérateur de Laplace-Beltrami***†, la trace Δ_σ du laplacien sur la sphère :

$$\Delta_\sigma u(\sigma) = \Delta_x u\left(\frac{x}{|x|}\right)_{x=\sigma} \tag{7.25}$$

Proposition 7.5. ***Décomposition du laplacien en coordonnées polaires***

$$(\Delta u)(r\sigma) = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)(r\sigma) + \frac{1}{r^2}\Delta_\sigma u(r\sigma) \tag{7.26}$$

†. Eugène Beltrami (1835-1900), mathématicien et physicien italien, qui apporta de nombreuses contributions à la théorie de l'élasticité, l'hydrodynamique, l'électricité, au magnétisme, ainsi qu'en géométrie non-euclidienne.

Démonstration. Une façon de démontrer ce résultat est d'utiliser la densité des fonctions à variables séparées $u(x) = v(r)w(\sigma)$ dans l'espace des fonctions $C^2(\mathbb{R}^d)$. ■

Remarque 7.6

i. Dans $\mathbb{R}^2$, en coordonnées polaires :

$$\Delta_\sigma u(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} u(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

ii. Dans $\mathbb{R}^3$, en coordonnées sphériques « usuelles » (ϕ est la ***longitude***, $\frac{\pi}{2} - \theta$ est la ***latitude***) :

$$\Delta_\sigma u(\sigma(\theta, \phi)) = \left(\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right) u(\sigma(\theta, \phi))$$

Proposition 7.6. *Formule de Green*†

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS \tag{7.27}$$

Démonstration. De la définition $\Delta = \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}$, on tire

$$\int_\Omega u\Delta v d\Omega = \int_\Omega \text{div}(u\,\overrightarrow{\text{grad}}(v)) - \overrightarrow{\text{grad}}(u).\overrightarrow{\text{grad}}(v)d\Omega$$

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)d\Omega = \int_\Omega \text{div}(u\,\overrightarrow{\text{grad}}(v) - v\,\overrightarrow{\text{grad}}(u))$$

puis on applique la formule (admise) d'Ostrogradsky‡

$$\int_\Omega \text{div}\, p d\Omega = \int_{\partial\Omega} p.n dS$$ ■

7.4.2 Fonctions harmoniques

Définition 7.7

Une fonction est dite ***harmonique*** sur Ω si son laplacien est nul sur Ω. C'est donc solution de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$.

Proposition 7.7. *Soit $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$.*

†. Ainsi nommée d'après le mathématicien George Green (1793-1841), physicien britannique, qui travailla sur les applications de l'analyse à l'électricité et au magnétisme.

‡. Mikhaïl Vassilievitch Ostrogradski (1801-1862), physicien et mathématicien russe.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

i. $\mathcal{H}(\Omega)$ *est un espace vectoriel.*

ii. $\mathcal{H}(\Omega)$ *est stable par dérivation.*

iii. $\mathcal{H}(\Omega)$ *est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (mais aussi pour la topologie induite par celle des distributions sur* Ω*).*

iv. $\forall (u, v) \in \mathcal{H}(\Omega)^2$:

$$\Delta(uv) = u\,\Delta v + v\Delta u + 2\overrightarrow{\text{grad}u}.\overrightarrow{\text{grad}v}$$

Le produit de deux fonctions harmoniques u et v est donc harmonique si et seulement si :

$$\overrightarrow{\text{grad}u}.\overrightarrow{\text{grad}v} = 0$$

On commence par s'intéresser aux solutions polynomiales de l'équation de Laplace.

Exemple 7.3

i. Les fonctions affines sont harmoniques sur $\mathbb{R}^d$.

ii. Une forme quadratique $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}x_ix_j$ est harmonique si la trace de la matrice associée est nulle ($\sum_{i=1}^{d} a_{ii} = 0$).

iii. Dans $\mathbb{R}^2$, un polynôme (à deux variables) $\sum a_{lm}x^l y^m$ est harmonique s'il est la partie réelle d'un polynôme complexe $\sum_{k=0}^{N} c_k z^k$ avec $z = x + iy$.

Remarque 7.7

Dans $\mathbb{R}^2$, une partie significative des résultats s'obtient en identifiant une fonction harmonique à la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Proposition 7.8. *Les polynômes harmoniques sont les seules distributions tempérées solutions de l'équation de Laplace sur* $\mathbb{R}^d$.

Une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^d$ *bornée est donc constante.*

Pour $n \geqslant 2$, *il existe des polynômes harmoniques de degré quelconque.*

Étant donnée l'invariance par rotation du laplacien, les solutions radiales de l'équation de Laplace ont un intérêt particulier.

Proposition 7.9. ***Fonctions harmoniques radiales***

*On cherche les fonctions radiales harmoniques sur une couronne (*0 *est donc exclu), elles sont de la forme :*

i. pour $d = 2$, $r \mapsto u(r) = c\ln(r) + c_0$.

ii. pour $d \geqslant 3$, $r \mapsto u(r) = \frac{c}{r^{d-2}} + c_0$.

Remarque 7.8

i. Si une fonction radiale harmonique est bornée sur $]0, r_0]$ alors elle est constante.

ii. Le calcul précédent restant valable pour les distributions, on remarque qu'une distribution radiale harmonique est une fonction (harmonique et analytique).

Malgré la singularité en 0, on peut (à l'instar de l'exercice 4.2) associer à u une distribution sur $\mathbb{R}^d$ entier, en posant :

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = \langle u, \Delta \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} u \Delta \phi dx \tag{7.28}$$

Dans $\mathbb{R}^2$, le calcul devient :

$$\begin{aligned} \int_{|x|>\varepsilon} u\Delta\phi dx &= \int_{r=\varepsilon}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r\ln(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) dr d\theta \\ &= \int_{r=\varepsilon}^{+\infty} \ln(r)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \int_0^{2\pi} \phi d\theta}{\partial r}\right) dr \end{aligned}$$

où on a exploité la périodicité de $\phi(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour annuler $\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} d\theta$.

On intègre par parties (et on utilise le fait que ϕ est à décroissance rapide) :

$$\int_{|x|>\varepsilon} u\Delta\phi dx = -\varepsilon\ln(\varepsilon)\left(\frac{\partial \int_0^{2\pi} \phi d\theta}{\partial r}\right)_{r=\varepsilon} + \int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon\cos\theta, \epsilon\sin\theta) d\theta \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 2\pi\phi(0)$$

Donc, dans $\mathbb{R}^2$ (on n'élimine plus le $\{0\}$) :

$$\Delta u = 2\pi\delta$$

Dans $\mathbb{R}^d$ ($n \geqslant 3$), on simplifie les calculs en remarquant que Δu étant une distribution radiale, on peut travailler sur des fonctions ϕ radiales :

$$\begin{aligned} \int_{|x|>\varepsilon} u\Delta\phi dx &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\Sigma} \frac{1}{r^{d-2}} \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) r^{d-1} dr d\sigma \\ &= \Sigma_d \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{r^{d-2}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) dr \\ &= \Sigma_d \left(-\varepsilon\frac{d\phi}{dr}(\varepsilon) - (n-2)\phi(\varepsilon)\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} -(n-2)\Sigma_d\phi(0) \end{aligned}$$

où on a intégré par parties. On rappelle que $\Sigma_d = \int_\Sigma d\sigma$ est la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^d$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Définition 7.8 Solution élémentaire

On appelle ***solution élémentaire*** (ou fondamentale) du laplacien dans $\mathbb{R}^d$, toute distribution E sur $\mathbb{R}^d$ solution de l'équation de Poisson[†]

$$\Delta E = \delta \tag{7.29}$$

Proposition 7.10. ***Solutions fondamentales radiales***

On a vu qu'il n'y avait qu'une solution élémentaire radiale (à une constante additive près) :

i. *dans* $\mathbb{R}^2$: $x \mapsto E_2(x) = \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|$.

ii. *Dans* $\mathbb{R}^d$, *pour* $d \geqslant 3$, $x \mapsto E_d(x) = \dfrac{1}{(2-d)\Sigma_d} \dfrac{1}{|x|^{d-2}}$.

iii. *Pour* $d \geqslant 2$: $\text{grad}(E_d) = \dfrac{\sigma}{\Sigma_d r^{d-1}}$.

iv. *Enfin,* E_d *est une fonction analytique sur* $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Pour aller plus loin

Des résultats complémentaires sur l'équation de Laplace en dimension quelconque sont en accès libre à partir des pages d'accueil du livre sur le site www.dunod.com

7.4.3 Équation de Laplace dans un disque

On s'intéresse ici à l'étude de l'équation de Poisson posée sur un disque où les coordonnées polaires et la technique de séparation de variables sont particulièrement efficaces.

On se place, dans $\mathbb{R}^2$ muni de coordonnées polaires (r, θ), on cherche la solution de l'équation de Laplace avec conditions aux limites de Dirichlet non homogènes, dans le cas où le domaine d'étude Ω est le disque de rayon $R > 0$, centré à l'origine. Le problème s'écrit donc :

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & \forall (r, \theta) \in [0, R[\times[0, 2\pi[\\ u(r = R, \theta) = f(\theta) & \forall \theta \in [0, 2\pi[\end{cases} \tag{7.30}$$

où f est une fonction régulière telle que :

$$f(0^+) = f(2\pi^-)$$

†. Découverte par Siméon Denis Poisson (1781-1840), mathématicien, géomètre et physicien français.

On commence par chercher des solutions de l'*EDP* à variables séparées :

$$u(r,\theta) = \varphi(r)\,\psi(\theta)$$

ce qui implique

$$\varphi''(r)\,\psi(\theta) + \frac{1}{r}\,\varphi'(r)\,\psi(\theta) + \frac{1}{r^2}\,\varphi(r)\,\psi''(\theta) = 0$$

On suppose que φ et ψ ne sont pas identiquement nulles.
Il existe un domaine $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ où φ et ψ ne s'annulent pas.
Sur ce domaine, on peut écrire :

$$\frac{\varphi''(r)}{\varphi(r)} + \frac{1}{r}\,\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = 0$$

et donc :

$$r^2\,\frac{\varphi''(r)}{\varphi(r)} + r\,\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable r, et celui de droite, de θ uniquement : il existe donc un réel λ tel que :

$$r^2\,\frac{\varphi''(r)}{\varphi(r)} + r\,\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda \tag{7.31}$$

Puisque la relation est vraie pour tout $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, s'il existe un réel r_0 en lequel φ s'annule, alors la relation

$$r_0^2\,\varphi''(r_0) + r\,\varphi'(r_0) = \lambda\,\varphi(r_0) = 0$$

est encore vérifiée. Par un raisonnement similaire sur θ, on montre que la relation (7.31) est vérifiée sur tout Ω.

On commence par étudier le système angulaire.

Pour garantir que ψ soit de classe C^1 sur tout le domaine indépendamment du choix des axes, on doit vérifier :

$$\begin{aligned} &\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = -\lambda \qquad \forall\,\theta \in [0, 2\pi[\\ &\psi(0^+) = \psi(2\pi^-) \\ &\psi'(0^+) = \psi'(2\pi^-) \end{aligned} \tag{7.32}$$

ce qui est un problème de Sturm-Liouville périodique.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Comme classiquement, différents cas interviennent suivant le signe de λ.

i. Si $\lambda = -\omega^2$ est strictement négatif, on obtient :

$$\psi(\theta) = \alpha \operatorname{ch}(\omega\theta) + \beta \operatorname{sh}(\omega\theta)$$

où α, β sont des constantes réelles.
Les conditions (7.32) conduisent alors à :

$$\alpha = \beta = 0$$

ce qui est impossible. Le cas $\lambda > 0$ est donc à rejeter.

ii. Si $\lambda = 0$, on obtient :

$$\psi(\theta) = \alpha\theta + \beta$$

où α, β sont des constantes réelles.
Les conditions (7.32) conduisent alors à :

$$\alpha = 0 \ \beta \in \mathbb{R}$$

On normalise la fonction constante sur $L^2([0, 2\pi])$:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{7.33}$$

iii. Si $\lambda = \omega^2 < 0$, on obtient :

$$\psi(\theta) = \alpha \cos(\omega\theta) + \beta \sin(\omega\theta)$$

où α, β sont des constantes réelles.
Les conditions (7.32) conduisent alors à :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha \cos(2\pi\omega) + \beta \sin(2\pi\omega) \\ \beta = \beta \cos(2\pi\omega) + \alpha \sin(2\pi\omega) \end{cases}$$

ce qui implique :

$$\omega \in \mathbb{N}^* \tag{7.34}$$

Les valeurs propres sont donc doubles. Après normalisation, les vecteurs de base sont :

$$\begin{aligned} \psi_{n,1}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\theta) \\ \psi_{n,2}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\theta) \end{aligned} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \tag{7.35}$$

La deuxième équation différentielle du système (7.31) s'écrit donc :

$$r^2\,\varphi''(r) + r\,\varphi'(r) = n^2\,\varphi(r) \quad \forall\, r \in [0, R[\tag{7.36}$$

cette équation contenant uniquement des termes de la forme $r^k\,\varphi^{(k)}(r)$, il est naturel de rechercher des solutions de la forme

$$r \mapsto r^p$$

où p est un entier à déterminer.

En injectant cette expression dans (7.36), on obtient :

$$(p^2 - n^2)\,r^p = 0 \quad \forall\, r \in [0, R[$$

Par suite :

$$p = \pm n$$

La solution devant être de classe C^2 à l'intérieur du disque, elle doit y être bornée. Le cas $p = -n$, qui donne la solution non bornée au voisinage de 0 ($r \mapsto \frac{1}{r^n}$), est donc à rejeter.

La solution admissible est donc

$$\varphi_n \;:\; r \mapsto r^n$$

Il reste encore à vérifier la condition aux limites : on cherche alors la solution u sous la forme

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\{\alpha_n\,\cos(n\,\theta) + \beta_n\,\sin(n\,\theta)\}$$

La condition aux limites en $r = R$ conduit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R^n\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\{\alpha_n\,\cos(n\,\theta) + \beta_n\,\sin(n\,\theta)\} = f(\theta) \;\;,\;\; \theta \in [0, 2\,\pi[$$

Les coefficients α_n et β_n sont donc proportionnels aux coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction $2\,\pi$ périodique qui coïncide avec f sur $[0, 2\,\pi[$. On les obtient par projection sur la base hilbertienne calculée précédemment :

$$\begin{cases} R^n\,\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{2\,\pi} f(t)\,\cos(n\,t)\,dt \\ R^n\,\beta_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{2\,\pi} f(t)\,\sin(n\,t)\,dt \end{cases} \tag{7.37}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On a donc, finalement :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{R^n}\left\{\left\{\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\right\}\cos(n\theta) + \left\{\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\right\}\sin(n\theta)\right\}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos(n(\theta-t))\right\}dt \tag{7.38}$$

La fonction ainsi obtenue est parfaitement définie sur le disque tout entier.
En outre, comme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos(n(\theta-t)) &= \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{R^n}e^{i\,n(\theta-t)}\right\}\\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{r}{R}e^{i(\theta-t)}\frac{1}{1-\frac{r}{R}e^{i(\theta-t)}}\right\}\\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{r}{R}e^{i(\theta-t)}\frac{R - r\,e^{-i(\theta-t)}}{(R - r\,e^{i(\theta-t)})\,(R - r\,e^{-i(\theta-t)})}\right\}\\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{r}{R}\frac{Re^{i(\theta-t)} - r}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-t)}\right\}\\
&= \frac{rR\cos(\theta-t) - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta-t)}\\
1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos(n(\theta-t)) &= \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta-t)}
\end{aligned}$$

on a donc :

$$u(r,\theta) = \quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left\{\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta-t)}\,dt\right\}$$

ce qui permet d'exprimer u de manière intrinsèque :

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left\{\frac{R^2 - \|\overrightarrow{OM}\|^2}{\|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_{R,t}}\|^2}\,dt\right\} \tag{7.39}$$

où M est le point de coordonnées $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, et $M_{R,t}$ est le point de coordonnées $(R\cos(\theta-t), R\sin(\theta-t))$.

On retrouve la **formule de Poisson**

Proposition 7.11. *La fonction*

$$M \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{ \frac{R^2 - \|\overrightarrow{OM}\|^2}{\|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_{R,t}}\|^2} dt \right\} \tag{7.40}$$

est solution du problème de Laplace aux limites dans le disque.

De même, on décline le **principe du maximum.**

Théorème 7.12. *Si, en tout point* $M_R = (R\cos\theta, R\sin\theta)$ *de* $\partial\Omega$

$$m_1 \leqslant f(\theta) \leqslant m_2$$

alors :

$$m_1 \leqslant u(r,\theta) \leqslant m_2 \quad \forall\, M_r = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \Omega$$

Démonstration. Avec les hypothèses sur f, comme $R^2 - \|\overrightarrow{OM}\|^2 \geqslant 0$, on a directement :

$$m_1 \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \|\overrightarrow{OM}\|^2}{\|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_{R,t}}\|^2} dt \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{f(t)\left(R^2 - \|\overrightarrow{OM}\|^2\right)}{\|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_{R,t}}\|^2} dt \leqslant m_2 \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \|\overrightarrow{OM}\|^2}{\|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_{R,t}}\|^2} dt$$

Il reste à simplifier l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \|\overrightarrow{OM}\|^2}{\|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_R}\|^2} dt &= \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2\,\frac{rR\cos(\theta - t) - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)} \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos(n(\theta - t)) \right\} dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

puisque, pour tout entier naturel non nul n :

$$\int_0^{2\pi} \cos(n(\theta - t))\, dt = 0$$

■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

7.5 Une équation aux dérivées partielles classique en finance : l'équation de Black-Scholes

7.5.1 Introduction

L'équation de Black-Scholes (BS), qui donne l'évolution du prix d'une option dans un marché financier [2, 15], est donnée, dans sa version sans dividendes, et dans le cas particulier d'un « call », pour des options européennes, par :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r\left(S\frac{\partial C}{\partial S} - C\right) = 0 \qquad \text{(BS)}$$

où le prix de l'option, C, est une fonction du prix du sous-jacent, S et du temps t ; r est le taux d'intérêt sans risque, et σ la volatilité du stock.

Si on désigne par E le prix d'exercice de l'option, et que l'on s'intéresse à une évolution dans un intervalle de temps de la forme $[0, T]$, $T > 0$, les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} C(0,t) & = 0 \quad \forall t \in [0,T] \\ \lim\limits_{S\to+\infty} (C(S,t) - S) & = 0 \quad \forall t \in [0,T] \\ C(S,T) & = \max\{S - E, 0\} \end{cases}$$

L'équation de Black-Scholes peut être résolue en se ramenant à l'équation de la chaleur. A cet effet, on effectue, dans un premier temps, le changement de variables :

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \quad , \quad x = \ln\frac{S}{E} \qquad (7.41)$$

et on pose :

$$C(S,t) = E\,\widetilde{C}(x,\tau)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial x} - k\,\widetilde{C} \qquad (7.42)$$

où :

$$k = \frac{2r}{\sigma^2} \qquad (7.43)$$

La condition finale $C(S,T) = \max\{S - E, 0\}$ devient donc une condition initiale :

$$\widetilde{C}(x,0) = \max\{e^x - 1, 0\} \qquad (7.44)$$

Pour éliminer les termes $k\,\widetilde{C}$ and $(k-1)\dfrac{\partial \widetilde{C}}{\partial x}$ de (7.42), on pose :

$$\widetilde{C}(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau}\,\widetilde{\widetilde{C}}(x,\tau) \qquad (7.45)$$

où α et β sont des réels à déterminer. On a :

$$\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial x} = \alpha\, e^{\alpha x+\beta\tau}\, \widetilde{\widetilde{C}}(x,\tau) + e^{\alpha x+\beta\tau}\, \frac{\partial \widetilde{\widetilde{C}}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial x^2} = \alpha^2\, e^{\alpha x+\beta\tau}\, \widetilde{\widetilde{C}}(x,\tau) + 2\,\alpha\, e^{\alpha x+\beta\tau}\, \frac{\partial \widetilde{\widetilde{C}}}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\, \frac{\partial^2 \widetilde{\widetilde{C}}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \tau} = \beta\, e^{\alpha x+\beta\tau}\, \widetilde{\widetilde{C}}(x,\tau) + e^{\alpha x+\beta\tau}\, \frac{\partial \widetilde{\widetilde{C}}}{\partial \tau}$$

En injectant ces expressions dans (7.42), on obtient :

$$\beta\, \widetilde{\widetilde{C}}(x,\tau) + \frac{\partial \widetilde{\widetilde{C}}}{\partial \tau} = (\alpha^2 + (k-1)\,\alpha - k)\, \widetilde{\widetilde{C}}(x,\tau) + (2\,\alpha\, + k - 1)\frac{\partial \widetilde{\widetilde{C}}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{\widetilde{C}}}{\partial x^2}$$

On obtient le résultat voulu en posant :

$$\alpha = \frac{1-k}{2} \quad , \quad \beta = \alpha^2 + (k-1)\,\alpha - k \tag{7.46}$$

ce qui conduit à l'équation de la chaleur normalisée :

$$\frac{\partial \widetilde{\widetilde{C}}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \widetilde{\widetilde{C}}}{\partial x^2} \qquad \forall\, (x,\tau) \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right] \times \mathbb{R} \tag{7.47}$$

avec la condition initiale :

$$\widetilde{\widetilde{C}}(x,0) = \widetilde{\widetilde{C}}_0(x) = \max\left\{e^{\frac{(k+1)\,x}{2}} - e^{\frac{(k-1)\,x}{2}}, 0\right\} \tag{7.48}$$

La solution analytique est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{C}}(x,\tau) &= \frac{1}{2\,\sqrt{\pi\,\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\widetilde{C}}_0(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4\,\tau}}\, dy \\
&= \frac{1}{2\,\sqrt{\pi\,\tau}}\, 2\,\sqrt{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left\{e^{\frac{(k+1)\,(x+2\,z\,\sqrt{\tau})}{2}} - e^{\frac{(k-1)\,(x+2\,z\,\sqrt{\tau})}{2}}, 0\right\} e^{-z^2}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\,\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{(k+1)\,(x+2\,z\,\sqrt{\tau})}{2}}\, e^{-z^2}\, dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\,\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{(k-1)\,(x+2\,z\,\sqrt{\tau})}{2}}\, e^{-z^2}\, dz
\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On développe le calcul du premier terme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{(k+1)(x+2z\sqrt{\tau})}{2}} e^{-z^2}\, dz &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{(k+1)^2\tau}{4}} e^{-\left(z+\frac{(k+1)\sqrt{\tau}}{2}\right)^2} dz \\
&= \frac{e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{(k+1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{-\left(z+\frac{(k+1)\sqrt{\tau}}{2}\right)^2} dz \\
&= \frac{e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{(k+1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}+\frac{(k+1)\sqrt{\tau}}{2}}^{+\infty} e^{-z^2} dz \\
&= \frac{e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{(k+1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}_c\left(-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}+\frac{(k+1)\sqrt{\tau}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{(k+1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2\,\mathrm{N}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2\sqrt{\tau}}-\sqrt{2}\,\frac{(k+1)\sqrt{\tau}}{2}\right)
\end{aligned}$$

où la fonction d'erreur complémentaire erf_c et la distribution gaussienne cumulée N sont définies, pour tout nombre réel x, par :

$$\operatorname{erf}_c(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-t^2}\, dt$$

$$\mathrm{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \operatorname{erf}_c\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Finalement, on obtient :

$$\widetilde{C}(x,\tau) = e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{(k+1)^2\tau}{4}} \mathrm{N}\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(k+1)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}\right) - e^{\frac{(k-1)x}{2}+\frac{(k-1)^2\tau}{4}} \mathrm{N}\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(k-1)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}\right)$$

Sachant que (7.46) donne :

$$e^{\alpha x+\beta\tau} = e^{\frac{(1-k)x}{2}-\frac{(k+1)^2}{4}\tau}$$

(7.45) conduit à :

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}(x,\tau) &= e^{\frac{(1-k)x}{2}-\frac{(k+1)^2}{4}\tau} \frac{e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{(k+1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}\, \mathrm{N}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2\sqrt{\tau}}-\sqrt{2}(k+1)\sqrt{\tau}\right) \\
&\quad - e^{\frac{(1-k)x}{2}-\frac{(k+1)^2}{4}\tau} \frac{e^{\frac{(k-1)x}{2}+\frac{(k-1)^2\tau}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}\, \mathrm{N}\left(-\frac{\sqrt{2}\,x}{2\sqrt{\tau}}-\sqrt{2}(k-1)\sqrt{\tau}\right) \\
&= e^{x}\, \mathrm{N}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2\sqrt{\tau}}-\sqrt{2}(k+1)\sqrt{\tau}\right) - e^{-k\tau}\, \mathrm{N}\left(-\frac{\sqrt{2}\,x}{2\sqrt{\tau}}-\sqrt{2}(k-1)\sqrt{\tau}\right)
\end{aligned}$$

Compte-tenu de (7.41) on a :

$$\tau = \frac{\sigma^2 (T-t)}{2}$$

On obtient donc en utilisant la définition (7.43) de k :

$$C(S,t) = \frac{S}{E}\,\mathrm{N}\left(\frac{\ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T-t}} - (k+1)\,\sigma\sqrt{T-t}\right) - \frac{e^{-r(T-t)}}{2}\,\mathrm{N}\left(\frac{\ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T-t}} - (k-1)\,\sigma\sqrt{T-t}\right)$$

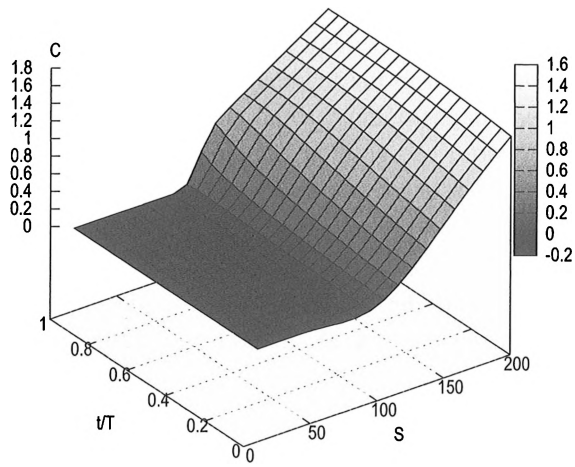


Figure 7.6 - Le « call », en fonction du prix du stock S et du temps t, pour $E = 100$, $r = 6\%$, $\sigma = 0.3$.

En finance, la sensibilité d'un portefeuille d'actions par rapport aux paramètres en jeu est mesurée par l'intermédiaire de ce que l'on appelle, communément, « les grecques » :

i. le Delta $\delta = \dfrac{\partial C}{\partial S} \in [0, 1]$, qui permet de quantifier le risque, et est donc la « grecque » la plus importante.

ii. Le Gamma $\Gamma = \dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2} \geqslant 0$.

iii. Le Vega (dont le nom vient de la forme de la lettre ν) $\nu = \dfrac{\partial C}{\partial \sigma}$.

iv. Le Theta $\Theta = \dfrac{\partial C}{\partial t}$..

v. Le rho $\rho = \dfrac{\partial C}{\partial r}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

La figure suivante permet de visualiser l'évolution du δ en fonction du prix du stock S et du temps t :

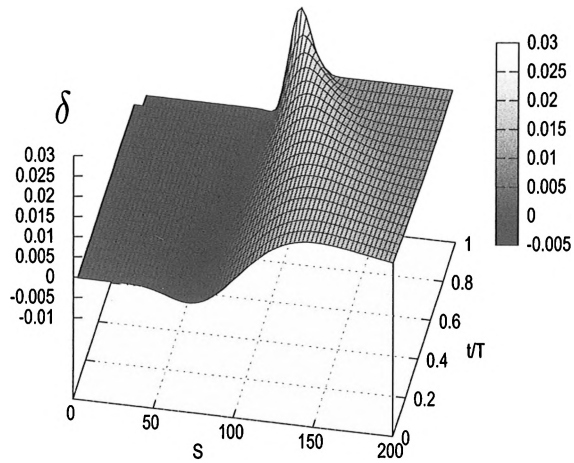


Figure 7.7 - Le « delta », en fonction du prix du stock S et du temps t, pour $E = 100$, $r = 6\%$, $\sigma = 0.3$.

La bonne stratégie, pour un trader, est de travailler sur des positions qui sont « delta-neutres » au moins une fois par jour, et, quand l'opportunité se présente, d'augmenter, le Gamma et le Vega [2].

8 INTRODUCTION AUX APPROCHES VARIATIONNELLES

Les approches variationnelles représentent des outils puissants pour la recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites. Elles permettent, en particulier, de travailler sur des domaines de forme très générale, bornés ou non (ce qui n'est pas le cas lorsque l'on utilise des techniques de séparation des variables). Elles donnent des résultats d'existence globale (et non juste autour des conditions aux limites). Ce cadre mathématique propice permet, en outre, de construire des techniques d'approximation fiables.

Dans ce qui suit, on travaillera uniquement sur des problèmes elliptiques, ce qui correspond souvent pour le physicien, à des problèmes purement spatiaux. Ceci dit, en considérant les problèmes d'évolution comme des problèmes spatiaux paramétrés en temps, on peut déduire des propriétés sur des classes de problèmes beaucoup plus générales. Le lecteur intéressé aura avantage à étudier des ouvrages de référence comme [6, 7, 8].

8.1 PRINCIPE DES APPROCHES VARIATIONNELLES

Un des problèmes fondamentaux, lorsque l'on étudie une EDP, est de choisir l'espace (et la structure algébrique correspondante) dans lequel on doit chercher la solution. Un cadre idéal est celui des espaces de Banach (espaces de Lebesgue, espace des fonctions continues sur un compact muni de la norme sup), mais le fait que la boule unité fermée pour la topologie forte ne soit pas compacte (car ce sont des espaces de dimension infinie) rend l'étude difficile (toutes les suites n'ont pas de valeurs d'adhérence).

L'idée de base des approches variationnelles est de considérer les EDP au sens des distributions, et d'exploiter les propriétés de la topologie faible. Mais comme l'espace des distributions ne dispose pas d'une structure mathématique agréable, et ne permet pas de parler de condition aux limites, on se restreint à des sous-ensembles de distributions qui constituent des espaces de Hilbert. Dans ces espaces, à l'aide de considérations algébriques, on arrive à montrer l'existence et l'unicité de la solution. Au final, on montre que sous certaines conditions la solution (au sens des distributions) possède en fait une certaine régularité, et, en particulier, que l'on peut l'identifier à une fonction classique (continue, voire dérivable).

Une illustration très explicite est donnée par l'équation de Poisson avec condition de Dirichlet homogène, posée sur un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, où d désigne la

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

dimension de l'espace physique, en général 2 ou 3 :

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8.1}$$

et où $\partial\Omega$ est le bord de Ω, f étant une donnée du problème. Cette formulation du problème est appelée **formulation forte**. Ce système correspond, typiquement, à la recherche de la flèche d'une membrane soumise à son propre poids (si f représente la gravité) attachée sur le bord du domaine Ω. C'est aussi celui qui régit la répartition de température d'un domaine en contact avec un thermostat et soumis à une source de chaleur f. Par la suite, on fera des hypothèses sur Ω et sur f pour donner un contexte dans lequel on sait déterminer si le problème possède, ou non, une solution.

La recherche de solutions à la formulation forte (solutions au sens classique) n'est que rarement possible, on va donc commencer par donner à l'EDP (sans regarder les conditions aux limites) un sens très général en considérant que u et f sont des distributions (chapitre 4). On a donc :

$$\langle \Delta u, \phi \rangle + \langle f, \phi \rangle = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{8.2}$$

En utilisant la définition du Laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, et la définition de la dérivation au sens des distributions, on obtient

$$\sum_{i=1}^{d} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{8.3}$$

que l'on note, en considérant la dualité dans $(\mathcal{D}(\Omega))^d$:

$$\langle \text{grad}(u), \text{grad}(\phi) \rangle = \langle f, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{8.4}$$

À ce niveau là, l'expression est strictement équivalente à l'EDP initiale (sans condition de bord) prise au sens des distributions. Nous allons voir qu'en faisant quelques choix nous aboutirons à un cadre très intéressant.

L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ est en fait beaucoup trop général pour être utilisable :

- il ne possède pas de structure mathématique pratique (pas de norme ni de produit scalaire) ;
- comme on ne peut pas parler de la valeur d'une distribution en un point, il n'est pas possible d'imposer des conditions au bord.

On va donc travailler dans un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui comble ces lacunes.

Définition 8.1

On désigne par $H^1(\Omega)$ le sous-ensemble des distributions qui peuvent s'identifier à une fonction de $L^2(\Omega)$ et dont la dérivée (au sens des distributions) peut s'identifier à une fonction de $L^2(\Omega)$:

$$u \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow u \in L^2(\Omega), \forall\, i \in \{1, \ldots, d\} \; : \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \qquad (8.5)$$

Il faut noter que la condition sur la dérivée s'écrit aussi :

$$\text{grad}(u) \in (L^2(\Omega))^d$$

$H^1(\Omega)$ est un cas particulier d'espace de Sobolev dont on vérifiera en annexe D qu'il possède toutes les propriétés qui nous intéressent, en particulier :

Proposition 8.1.

i. $H^1(\Omega)$ *peut être muni de la structure d'espace de Hilbert grâce au produit scalaire suivant :*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\text{grad}(u), \text{grad}(v))_{(L^2)^d} \quad \forall\, (u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \qquad (8.6)$$

ii. les fonctions de $H^1(\Omega)$ *possèdent une valeur sur* $\partial\Omega$.

Comme les éléments de $H^1(\Omega)$ peuvent s'identifier à des fonctions, on peut abandonner la notation de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et utiliser, à la place, la notation intégrale.

On peut donc définir le problème suivant :

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que : } \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(\phi) dx = \int f \phi \, dx & \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (8.7)$$

Pour pouvoir l'écrire sous cette forme, il a fallu supposer que f était au moins localement intégrable. Pour la suite, on va même supposer $f \in L^2(\Omega)$, de façon à pouvoir étendre le domaine de définition de ϕ.

La condition $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas très satisfaisante et peut être améliorée en travaillant dans un espace plus grand. Dans l'absolu, plus l'espace de test est grand, mieux la fonction u est spécifiée. Il est ici possible de raisonner par densité en cherchant le plus grand espace tel que l'équation garde son sens.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Définition 8.2

On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Proposition 8.2.

i. $H_0^1(\Omega)$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $H^1(\Omega)$.

ii. $H_0^1(\Omega)$ *coïncide avec l'ensemble des fonctions de* $H^1(\Omega)$ *qui s'annulent sur* $\partial\Omega$.

On voit que ϕ peut être pris dans $H_0^1(\Omega)$ et que, par ailleurs, u doit appartenir à $H_0^1(\Omega)$ pour satisfaire les conditions aux limites.

Cette dernière propriété permet de faire passer la condition aux limites dans l'espace de recherche de u. On aboutit enfin à la formulation suivante du problème :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que, pour tout } \phi \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(\phi)\, dx = \int f\, \phi\, dx \tag{8.8}$$

Cette formulation est appelée **formulation faible**, elle permet d'utiliser des techniques de recherche de solution et d'approximation très puissantes.

Remarque 8.1

Pour ceux qui n'aiment pas les distributions, la formulation faible peut être obtenue par des techniques d'intégration classiques (elle peut aussi être donnée directement comme modèle physique, comme c'est le cas pour le principe des puissances virtuelles en mécanique). L'idée est de partir de l'équation forte, de la multiplier par un champ test qui s'annule sur $\partial\Omega$, d'intégrer sur le domaine puis de réaliser une intégration par parties (théorème de la divergence) :

$$\Delta u + f = 0 \tag{8.9}$$

On multiplie membre à membre par le champ test et on intègre :

$$\int_\Omega (\Delta u + f)\, \phi\, dx = 0 \tag{8.10}$$

soit :

$$\int_\Omega (\Delta u)\, \phi\, dx + \int_\Omega f\, \phi\, dx = 0 \tag{8.11}$$

ou encore, puisque $\Delta u = \text{grad}(\text{div}(u))$:

$$\int_\Omega \text{div}(\text{grad}(u))\, \phi\, dx + \int_\Omega f\, \phi\, dx = 0 \tag{8.12}$$

Une intégration par parties conduit alors à :

$$\int_\Omega \text{div}(\phi\, \text{grad}(u))\, dx - \int_\Omega \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(\phi)\, dx + \int_\Omega f\, \phi\, dx = 0 \tag{8.13}$$

L'intégrale d'une divergence sur un domaine est égale à l'intégrale du flux normal sur le bord ; de plus, si g est un champ scalaire et v un champ vectoriel :

$$\operatorname{div}(g\,v) = f\operatorname{div}(v) + \operatorname{grad}(g)\cdot v$$

On en déduit :

$$\int_{\partial\Omega} \phi \operatorname{grad}(u)\cdot n\,dx - \int_{\Omega} \operatorname{grad}(u)\cdot\operatorname{grad}(\phi)\,dx + \int_{\Omega} f\,\phi\,dx = 0 \tag{8.14}$$

puis, comme le champ test s'annule sur le bord :

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad}(u)\cdot\operatorname{grad}(\phi)\,dx = \int_{\Omega} f\,\phi\,dx \tag{8.15}$$

Il faut compléter la séquence d'équations en précisant les espaces fonctionnels qui donnent du sens à l'expression obtenue. Il faut intégrer des gradients, ce qui requière que u soit dans $H^1(\Omega)$ et ϕ dans $H_0^1(\Omega)$. Il faut aussi prendre en compte les conditions aux limites sur u, ce qui conduit à $u \in H_0^1(\Omega)$.

On introduit les notations classiques suivantes :

$$\begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_{\Omega} \operatorname{grad}(u)\cdot\operatorname{grad}(v)\,dx & \forall\,(u,v) \in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \\ l(v) = \displaystyle\int_{\Omega} f\,v\,dx & \forall\,v \in H^1(\Omega) \\ V = H_0^1(\Omega) & \end{cases} \tag{8.16}$$

On arrive alors au « problème variationnel abstrait » suivant :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que, pour tout } v \in V : \quad a(u,v) = l(v) \tag{8.17}$$

On verra qu'il existe différents théorèmes d'existence et d'unicité de solution, en fonction des propriétés relativement simples de V, a et l. En fait, les résultats peuvent même s'étendre à des inégalités variationnelles.

Dans le cas qui nous concerne, on dispose des propriétés évidentes suivantes :

⇝ V est un espace de Hilbert.

⇝ a est une forme bilinéaire sur V :

$$\begin{aligned} a(u,v) &\in \mathbb{R} && \forall\,(u,v) \in V^2 \\ a(u_1 + \lambda\,u_2, v) &= a(u_1,v) + \lambda\,a(u_2,v) && \forall\,(u_1,u_2,v) \in V^3,\ \forall\lambda \in \mathbb{R} \\ a(u, v_1 + \mu\,v_2) &= a(u,v_1) + \mu\,a(u,v_2) && \forall\,(u,v_1,v_2) \in V^3,\ \forall\mu \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{8.18}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

$\rightsquigarrow$ l est une forme linéaire sur V :

$$\begin{aligned} l(v) &\in \mathbb{R} && \forall v \in V \\ l(v_1 + \mu v_2) &= l(v_1) + \mu\, l(v_2) && \forall (v_1, v_2) \in V^2,\ \forall \mu \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{8.19}$$

Dans l'annexe D, on donne des résultats permettant de prouver les propriétés suivantes :

i. l est continue sur V :

$$\exists C > 0 \,/\, |l(v)| \leqslant C \|v\|_V \qquad \forall v \in V \tag{8.20}$$

ii. a est continue sur V :

$$\exists M > 0 \,/\, |a(u, v)| \leqslant M \|u\|_V \|v\|_V \qquad \forall (u, v) \in V^2 \tag{8.21}$$

iii. a est *coercive* (ou *V-elliptique*) sur V :

$$\exists \alpha > 0 \,/\, a(u, u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V \tag{8.22}$$

Dans la section 8.2, on présente des théorèmes permettant de conclure sur l'existence et l'unicité de la solution du problème dans V (et même des résultats plus puissants). En 8.3, on montre que la solution du problème faible peut dans certain cas avoir une régularité au sens classique. En 8.4, on applique l'approche variationnelles à des EDP plus générales. Enfin, la section 8.5 précise comment utiliser les formulations faibles pour obtenir de bonnes approximations.

Pour clore cette introduction, donnons une formulation équivalente dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique, i.e. lorsque $a(u, v) = a(v, u)$ pour tout (u, v) de V^2.

Proposition 8.3. *Dans le cas où la forme bilinéaire a est bilinéaire symétrique coercive, la formulation faible 8.17 est équivalente à la formulation énergétique suivante :*

$$\textit{Trouver } u \in V \textit{ tel que, pour tout } v \in V : \quad J(u) \leqslant J(v), \textit{ avec } J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \tag{8.23}$$

Remarque 8.2

Dans le cas de l'équation de Poisson :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \text{grad}(v)^2 \, dx - \int_\Omega f\, v \, dx$$

que l'on interprète comme une énergie potentielle.

Démonstration. Soient u et h dans V. Calculons $J(u+h)$ en exploitant la (bi-)linéarité des opérateurs et la symétrie de a :

$$\begin{aligned} J(u+h) &= \frac{1}{2}a(u+h,u+h) - l(u+h) = \left(\frac{1}{2}a(u,u) - l(u)\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}a(u,h) + \frac{1}{2}a(h,u) - l(h)\right) + \frac{1}{2}a(h,h) \\ &= J(u) + (a(u,h) - l(h)) + \frac{1}{2}a(h,h) \end{aligned} \tag{8.24}$$

Si on suppose que u est solution du problème faible, alors :

$$J(u+h) - J(u) = \frac{1}{2}a(h,h) \geqslant 0$$

grâce à la coercivité de a. u minimise bien l'énergie.

Réciproquement, si u minimise l'énergie, on pose : $h = \eta q$ avec $\eta \in \mathbb{R}$ et $q \in V$. On obtient alors :

$$0 \leqslant J(u+\eta q) - J(u) = \eta\,(a(u,q) - l(q)) + \frac{\eta^2}{2}a(q,q)$$

On reconnaît un polynôme du second degré en η. Pour que l'inégalité soit vraie pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, il faut que le discriminant soit négatif ou nul, et donc

$$(a(u,q) - l(q))^2 \leqslant 0 \quad \forall\, q \in V$$

ce qui implique $a(u,q) = l(q)$. ■

Le terme J s'interprète physiquement comme une énergie. On cherche donc un champ u qui minimise l'énergie. Dans ce cas, la formulation faible prend aussi le nom de **formulation variationnelle** : on cherche le champ u tel que la variation d'énergie soit nulle pour une petite variation autour de u. On voit en fait que la forme faible correspond à la nullité de la différentielle de l'énergie.

8.2 Problème variationnel abstrait

Dans cette partie, on étudie des problèmes variationnels abstraits. Dans un espace de Hilbert H, on introduit :

- un convexe fermé K de H ;
- une forme bilinéaire continue coercive a ;
- une forme linéaire continue l.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Pour la suite nous allons avoir besoin de nommer les différentes constantes. On désigne par α la constante de coercivité de a et M sa constante de continuité. On pourra, si besoin est, utiliser directement $\|l\|_*$ pour la constante de continuité de l.

Le théorème le plus général se contente des hypothèses ci-dessus, ceci dit, le cas particulier où la forme bilinéaire a est symétrique est très intéressant et joue un rôle pratique important. Le lecteur est invité à consulter les annexes B.4 et B.5 qui prouvent les théorèmes fondamentaux utilisés dans ce chapitre.

8.2.1 Cas où a est symétrique

Si a est symétrique, on introduit l'énergie J sur H :

$$\text{pour } v \in H,\ J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \tag{8.25}$$

Théorème 8.4. ***Stampacchia***

Sous les hypothèses précédentes, il existe un unique u de K tel que, pour tout v de K :

$$J(u) \leqslant J(v)$$

Démonstration. Pour $v \in H$, on a $0 \leqslant \alpha\|v\|_H^2 \leqslant a(v,v) \underset{def}{=} \|v\|_a^2 \leqslant M\|u\|_H^2$; ainsi, a est un produit scalaire équivalent à $(.,.)_H$, et $(H, \|\cdot\|_a)$ est un espace de Hilbert dans lequel l est continue. D'après le théorème de Riesz (voir B.15), il existe un unique L de H tel que : $l(v) = a(L,v),\ \forall v \in H$. On a donc :

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - a(L,v) \\ &= \frac{1}{2}a(v-L, v-L) - \frac{1}{2}a(L,L) = \frac{1}{2}\|v-L\|_a^2 - \frac{1}{2}\|L\|_a^2 \end{aligned} \tag{8.26}$$

K étant un convexe fermé de $(H, \|.\|_a)$, d'après le théorème de projection (voir B.10), $P_K(L) \in K$ est l'unique vecteur tel que $\|L - P_K(L)\|_a \leqslant \|L - v\|_a$ quel que soit $v \in K$. On en déduit que l'existence du minimiseur de l'énergie, qui est $u = P_K(L)$. ■

Corollaire 8.5. *Sous les mêmes hypothèses, $u = P_K(L)$ est l'unique solution de $a(u, v-u) \geqslant l(v-u),\ \forall v \in K$.*

Démonstration. D'après la caractérisation de la projection (voir B.11), on a aussi, pour tout $v \in H$:

$$a(L - P_K(L), v - P_K(L)) \leqslant 0 \tag{8.27}$$

ou encore :

$$a(L, v - P_K(L)) \leqslant a(P_K(L), v - P_K(L)) \tag{8.28}$$

soit :

$$l(v - P_K(L)) \leqslant a(P_K(L), v - P_K(L)) \tag{8.29}$$

Réciproquement, supposons $u \in K$ et $a(u, v-u) \geqslant l(v-u)$, $\forall v \in K$. On a alors :

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) - \frac{1}{2}a(u,u) + l(u) \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{a(v-u, v-u)}_{\geqslant 0} + \underbrace{a(u, v-u) - l(v-u)}_{\geqslant 0} \end{aligned} \tag{8.30}$$

■

Bien sûr, le cas particulier où K est un sous-espace vectoriel fermé (que l'on notera V) est intéressant.

Proposition 8.6. *Si V est un sous-espace vectoriel fermé, alors l'inéquation variationnelle du corollaire précédent devient une équation variationnelle : $u = P_V(L)$ est l'unique solution de :*

$$a(u, v) = l(v), \ \forall v \in V \tag{8.31}$$

Démonstration. Comme V est un sous-espace vectoriel, alors, pour tout v de V : $a(L - P_V(K), v) = 0$; ainsi : $l(v) = a(P_V(L), v)$. Réciproquement, d'après le corollaire B.13, si $a(u, v) = l(v)$ pour tout v de V, alors :

$$a(u, v-u) = a(u,v) - a(u,u) = l(v) - l(u) = l(v-u)$$ ■

8.2.2 Cas où *a* est non symétrique

Dans ce cas, il n'existe plus d'équivalence en minimisation d'énergie et la démonstration de l'existence de solution repose sur d'autres principes. Donnons, pour commencer, deux lemmes techniques.

Lemme 8.7. ***Théorème du point fixe de Banach-Picard***
Soit T une application contractante dans l'espace de Banach $(H, \|\cdot\|)$[†].
Alors, il existe un unique x_0 de H tel que : $Tx_0 = x_0$.

Démonstration.
Unicité : si u_1 et u_2 sont deux points fixes, on commence par écrire :

$$\|u_1 - u_2\| = \|Tu_1 - Tu_2\| \leqslant k\|u_1 - u_2\| \tag{8.32}$$

†. C'est-à-dire qu'il existe une constante k dans l'intervalle $]0, 1[$ telle que, pour tout $(x, y) \in H^2$: $\|Tx - Ty\| \leqslant k\|x - y\|$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Il en résulte :

$$(1-k)\|u_1-u_2\| \leqslant 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \tag{8.33}$$

Existence : pour $u_0 \in H$, on pose $u_{n+1} = Tu_n$; on va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Par récurrence immédiate :

$$\|u_2-u_1\|_H \leqslant k\|u_1-u_0\|_H \tag{8.34}$$

et :

$$\|u_{n+1}-u_n\|_H \leqslant k^n\|u_1-u_0\|_H \tag{8.35}$$

Par inégalité triangulaire :

$$\|u_{n+p}-u_n\|_H = \|u_{n+p}-u_{n+p-1}+u_{n+p-1}-\ldots-u_n\|_H \tag{8.36}$$

ce qui conduit à :

$$\|u_{n+p}-u_n\|_H \leqslant k^n\left(\sum_{i=0}^{p-1}k^i\right)\|u_1-u_0\|_H = \frac{k^n(1-k^p)}{1-k}\|u_1-u_0\|_H \tag{8.37}$$

Il en résulte :

$$\|u_{n+p}-u_n\|_H \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|u_1-u_0\|_H \to_{n\to\infty} 0 \tag{8.38}$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et que l'espace est complet, elle converge vers une limite $u \in H$, qui vérifie : $u = Tu$. ■

Proposition 8.8. ***Généralisation du théorème de Riesz***

Dans un espace de Hilbert H, si a est une forme bilinéaire continue, il existe un unique opérateur linéaire A de H dans H tel que

$$a(u,v) = (Au,v)_H \quad \forall\,(u,v) \in H^2$$

Cet opérateur linéaire A est continu.

Démonstration. Pour u fixé dans H, l'application $v \in H \mapsto a(u,v)$ est une application linéaire continue, donc d'après le théorème de Riesz (voir B.15), il existe un unique vecteur noté A_u tel que :

$$(A_u,v)_H = a(u,v) \quad \forall\, v \in H$$

Étudions maintenant l'application $u \mapsto A_u$. Pour tout (u_1,u_2,v) de H^3 :

$$a(u_1+u_2,v) = (A_{(u_1+u_2)},v)_H \tag{8.39}$$

soit :

$$a(u_1 + u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v) = (A_{u_1}, v)_H + (A_{u_2}, v)_H \tag{8.40}$$

et donc :

$$(A_{(u_1+u_2)} - (A_{u_1} + A_{u_2}), v)_H = 0 \tag{8.41}$$

ce qui prouve que $A_{(u_1+u_2)} = (A_{u_1} + A_{u_2})$. On raisonne de même sur $A_{\lambda u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on montre que $A_{\lambda u} = \lambda A_u$. Et donc $u \mapsto A_u$ est linéaire, on emploie donc la notation Au (opérateur appliqué à un vecteur).

Enfin :

$$|a(u, v)| = |(Au, v)_H| \leqslant M\|u\|_H\|v\|_H$$

On prend $v = Au$, et on en déduit : $\|Au\|_H \leqslant M\|u\|_H$. L'application A est donc continue. ■

Ces résultats nous permettent d'aboutir au résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel.

Théorème 8.9. ***Théorème de Lax-Milgram***

Dans un espace de Hilbert H, si a est une forme bilinéaire continue coercive et l est une forme linéaire continue, il existe un unique u de H tel que, pour tout v de H :

$$a(u, v) = l(v) \tag{8.42}$$

Démonstration. On reformule le problème : $a(u, v) = (Au, v)_H$ et $l(v) = (L, v)_H$ donc $(Au - L, v)_H = 0$.

Il faut donc montrer qu'il existe un unique u de H tel que : $Au = L$ (i.e. que A est un isomorphisme de H).

On construit $T : v \mapsto v - \lambda(Av - L)$ avec $\lambda > 0$. On a donc : $Tu = u \Longleftrightarrow Au = L$.

Il suffit alors de montrer qu'un choix judicieux de λ rend T contractante. À cet effet, on écrit :

$$\begin{aligned} \|Tv - Tw\|_H^2 &= \|v - w - \lambda A(v - w)\|_H^2 = \|v - w\|_H^2 \underbrace{-2\lambda(A(v - w), v - w)_H}_{\leqslant -2\lambda\alpha\|v-w\|_H^2} \\ &\quad + \lambda^2 \underbrace{\|A(v - w)\|_H^2}_{\leqslant M^2\|v-w\|_H^2} \\ &\leqslant (1 - 2\lambda\alpha + M^2\lambda^2)\|v - w\|_H^2 \end{aligned} \tag{8.43}$$

où on a utilisé la coercivité de a (constante α) et sa continuité (constante M). Une étude rapide du polynôme montre que :

$$1 - 2\lambda\alpha + M^2\lambda^2 < 1 \quad \text{pour} \quad 0 < \lambda < 2\frac{\alpha}{M}$$

T est alors une contraction. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Le résultat précédent d'existence et d'unicité peut être complété par une étude de la relation entre la solution u et le chargement l.

Théorème 8.10. ***Dépendance continue de la solution***
u dépend continûment du second membre l. En effet :

$$\begin{aligned} \alpha\|u\|_H^2 \leqslant a(u,u) = l(u) \leqslant \|l\|_* \|u\|_H \\ \|u\|_H \leqslant \frac{1}{\alpha}\|l\|_* \end{aligned} \tag{8.44}$$

Terminons par un résultat un peu plus général.

Théorème 8.11. ***Lax-Milgram sur un convexe fermé***
Dans un espace de Hilbert H, on considère un convexe fermé K, a une forme bilinéaire continue coercive, l une forme continue, alors, il existe un unique u de K tel que, pour tout v de K :

$$a(u, v-u) \geqslant l(v-u) \tag{8.45}$$

Démonstration. Autrement dit, u doit satisfaire :

$$(Au - L, v-u)_H \geqslant 0 \quad , \forall v \in K$$

On introduit la projection sur K :

$$T_K : \quad H \to K, v \mapsto T_k(v) = P_K(v - \lambda(Av - L)) \tag{8.46}$$

Comme précédemment, on va montrer qu'un choix judicieux de $\lambda > 0$ rend T_K contractante :

$$\begin{aligned} \|T_K(v) - T_K(w)\|_H^2 &= \|P_K(v - \lambda(Av - L)) - P_K(w - \lambda(Aw - L))\|_H^2 \\ &\leqslant \|(v-w) - \lambda(A(v-w))\|_H^2 \end{aligned} \tag{8.47}$$

où on a utilisé le fait que P_K est contractante (voir B.12). On arrive au même résultat que pour le théorème de Lax-Milgram sur l'espace entier.

Soit u tel que $T_K(u) = u$, on rappelle que la projection satisfait :

$$(v - P_K(v), w - P_K(v))_H \leqslant 0 \quad \forall w \in K$$

On applique le résultat à $u - \lambda(Au - L)$:

$$\begin{aligned} (u - \lambda(Au - L) - P_K(u - \lambda(Au - L)), w - P_K(v - \lambda(Av - L))) \leqslant 0 \\ \lambda(Au - L, w - u) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{8.48}$$

■

8.3 Notions sur la régularité de la solution faible

On reprend ici le problème de l'équation de Poisson à condition de Dirichlet homogène au bord. On a vu dans la première section que la formulation faible du problème est la suivante :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(v)\, dx = \int f\, v\, dx \tag{8.49}$$

On pose, pour tout $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_\Omega \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(v)\, dx$$

et

$$l(v) = \int f\, v\, dx$$

On a vu que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, que a est bilinéaire symétrique continue coercive, et que l est continue coercive. On peut en déduire, grâce au théorème de Stampacchia, que la solution u du problème faible existe et qu'elle est unique.

On peut maintenant s'interroger si cette solution u de $H_0^1(\Omega)$ a un sens plus classique. On interprète l'équation au sens des distributions pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{gathered} a(u, v) = \langle \text{grad}(u), \text{grad}(\phi) \rangle = l(\phi) = \langle f, \phi \rangle \\ \langle \Delta u + f, \phi \rangle = 0 \end{gathered} \tag{8.50}$$

ce qui signifie que $\Delta u + f$ est la distribution nulle. Par suite : $(\Delta u + f) \underset{pp}{=} 0$. Si on suppose que $f \in L^2(\Omega)$, cela signifie que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et en fait, si on fait quelques hypothèses de plus sur Ω comme une forme convexe, $u \in H^2(\Omega)$. D'après le théorème de plongement de Sobolev (voir D.3), on peut en déduire la régularité classique. Dans le cas de la dimension 1, u est continûment dérivable.

Le problème de la régularité des solutions de formulations faibles peut devenir très complexe, il fait intervenir la qualité du chargement, la forme du domaine, la formulation elle-même. L'exemple ici était extrêmement simple.

8.4 Traitement de quelques EDP

Il s'agit dans cette section de montrer rapidement que les approches variationnelles s'appliquent à des problèmes plus généraux que la simple équation de Laplace avec conditions limites homogènes. Cette présentation reste très partielle et le lecteur est invité à se référer à des ouvrages plus spécifiques comme [6, 8].

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

8.4.1 Conditions de Dirichlet non-homogènes

On s'intéresse ici au problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = & 0 & \text{dans } \Omega \\ u = & u_d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8.51}$$

Autrement dit on cherche une fonction harmonique dont la valeur est imposée sur le bord du domaine.

On introduit l'espace suivant :

$$\mathcal{V} = \{u \in H^1(\Omega),\ u = u_d \text{ sur } \partial\Omega\} \tag{8.52}$$

et on aboutit au problème suivant :

$$\begin{gathered} \text{Trouver } u \in \mathcal{V} \text{ tel que, pour tout } v \in H_0^1(\Omega) : \\ \int_\Omega \operatorname{grad}(u) \cdot \operatorname{grad}(v)\, dx = 0 \end{gathered} \tag{8.53}$$

Afin de se ramener au même espace de recherche (pour u) et de test (pour v), on fait appel à un relèvement, à l'instar de ce que l'on a fait au chapitre séparation de variables. Pour cela on utilise les résultats des théorèmes de trace (proposition D.7). La formulation prend du sens pour $u_d \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, car on peut trouver un relèvement $\bar{u}_d \in H^1(\Omega)$ (autrement dit, u_d est la trace de $\bar{u}_d$ sur le bord de Ω).

On a alors $\mathcal{V} = \bar{u}_d + H_0^1(\Omega)$. On cherche alors u sous la forme $\tilde{u} + \bar{u}_d$; la formulation variationnelle devient :

$$\begin{gathered} \text{Trouver } \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que, pour tout } v \in H_0^1(\Omega) : \\ \int_\Omega \operatorname{grad}(\tilde{u}) \cdot \operatorname{grad}(v)\, dx = -\int_\Omega \operatorname{grad}(\bar{u}_d) \cdot \operatorname{grad}(v)\, dx \end{gathered} \tag{8.54}$$

Cette formulation vérifie les hypothèses du théorème de Stampacchia. On a donc existence et unicité de la solution. Par ailleurs, on a également la continuité de la solution vis-à-vis du chargement qui s'écrit :

$$\|u\|_{H^1} \leqslant C \|u_d\|_{H^{\frac{1}{2}}} \tag{8.55}$$

où C est une constante qui dépend de Ω.

8.4.2 Problèmes à conditions limites mélangées Dirichlet / Neumann

On s'intéresse ici au cas où la frontière du domaine est partagée en deux parties complémentaires : le fermé $\partial_u\Omega$ où des conditions de Dirichlet u_d sont imposées et

l'ouvert $\partial_g\Omega$ où des conditions de Neumann g sont imposées :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u_d & \text{sur } \partial_u\Omega \\ \text{grad}(u)\cdot n = g & \text{sur } \partial_g\Omega \end{cases} \tag{8.56}$$

On introduit l'espace de recherche $\mathcal{V}$ suivant :

$$\mathcal{V} = \{u \in H^1(\Omega),\ u = u_d \text{ sur } \partial_u\Omega\} \tag{8.57}$$

c'est un sous-espace affine de $H^1(\Omega)$ dont l'espace vectoriel associé $\mathcal{V}_0$ est :

$$\mathcal{V}_0 = \{u \in H^1(\Omega),\ u = 0 \text{ sur } \partial_u\Omega\} \tag{8.58}$$

On a supposé que $\partial_u\Omega$ possédait la régularité requise pour que l'opérateur de trace restreinte (sur la portion $\partial_u\Omega$ du bord) soit bien défini et continu. Dans ces conditions $\mathcal{V}_0$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$. De même, on suppose ici que u_d est suffisamment régulier pour que l'on puisse définir un relèvement $\bar{u}_d$ de u_d dans $\mathcal{V}$.

Une propriété fondamentale de l'espace $\mathcal{V}_0$, qui servira à montrer la coercivité de la formulation variationnelle, est que, sous des conditions de forme de Ω, les fonctions qui le composent vérifient une inégalité de Poincaré dès que la mesure (de surface) de $\partial_u\Omega$ n'est pas nulle. Typiquement, on peut reprendre la démonstration de la proposition D.10 pour $H^1_0(\Omega)$ avec Ω dans une bande de direction ξ non parallèle à $\partial_u\Omega$.

Il faut bien noter que les conditions de Neumann ne rentrent pas dans l'espace de recherche (il faudrait utiliser un espace de recherche autre que H^1 pour leur donner du sens).

La formulation variationnelle s'obtient par multiplication par un champ test dans $\mathcal{V}_0$ et intégration par parties :

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega v\,\Delta u\,dx &= \int_\Omega (\text{div}(v\,\text{grad}(u)) - \text{grad}(u)\cdot\text{grad}(v))\,dx \\ \int_\Omega \text{grad}(u)\cdot\text{grad}(v)\,dx &= \int_{\partial\Omega} v\,\text{grad}(u)\cdot n\,dS = \int_{\partial_u\Omega} v\,\text{grad}(u)\cdot n dS \\ &\quad + \int_{\partial_g\Omega} v\,\text{grad}(u)\cdot n dS \end{aligned} \tag{8.59}$$

en utilisant la nullité de v sur $\partial_u\Omega$, et en posant $u = \bar{u}_d + \tilde{u}$, on aboutit à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in \mathcal{V}_0 \text{ tel que } \forall v \in \mathcal{V}_0 : \\ \displaystyle\int_\Omega \text{grad}(\tilde{u})\cdot\text{grad}(v)\,dx = \int_{\partial_g\Omega} v\,g\,dS - \int_\Omega \text{grad}(\bar{u}_d)\cdot\text{grad}(v)\,dx \end{cases} \tag{8.60}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Cette formulation prend du sens pour $g \in L^2(\partial_g\Omega)$, puisqu'on peut alors utiliser le théorème de Cauchy-Schwarz pour montrer la continuité de la forme linéaire (en utilisant la continuité de l'application trace pour passer de $\|v\|_{L^2(\partial_g\Omega)}$ à $\|v\|_{H^1(\Omega)}$).

La formulation vérifie les hypothèses du théorème de Stampacchia. On a donc existence et unicité de la solution et continuité vis-à-vis du chargement, qui s'écrit :

$$\|u\|_{H^1} \leqslant C_u \|u_d\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial_u\Omega)} + C_g \|g\|_{L^2(\partial_g\Omega)} \tag{8.61}$$

où C_u et C_g sont des constantes qui dépendent de $(\Omega, \partial_u\Omega, \partial_g\Omega)$.

8.4.3 Problèmes de Neumann

On considère maintenant le cas d'un domaine soumis à des conditions de Neumann sur tout son bord.

$$\begin{cases} -\Delta u = & f & \text{dans } \Omega \\ \text{grad}(u) \cdot n = & g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8.62}$$

La formulation variationnelle s'obtient comme précédemment :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(v) dx = \int_\Omega v f \, dx + \int_{\partial\Omega} v g \, dS \end{cases} \tag{8.63}$$

On suppose $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$, ce qui garantit la continuité de la forme linéaire.

La difficulté pour cette formulation est qu'il n'y a pas d'inégalité de Poincaré dans $H^1(\Omega)$ et donc pas de coercivité. En fait on peut voir que la forme bilinéaire a pour noyau les fonctions constantes sur Ω (puisque leur gradient est nul). Si on prend $v = r \in \mathbb{R}$ dans la formulation, on obtient :

$$0 = r\left(\int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, dS\right), \quad \forall r \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, dS = 0 \tag{8.64}$$

Cette équation est une condition sur les chargements f et g, nécessaire pour qu'il puisse y avoir une solution. Par ailleurs, si l'on suppose que u est une solution de la formulation variationnelle, on voit que $u + r$ ($r \in \mathbb{R}$) est également solution. Dans les cas précédents les fonctions constantes étaient éliminées de l'espace de recherche par la présence de conditions limites de Dirichlet (qui font que la seule fonction constante possible dans l'espace utilisé est la fonction nulle).

Sous réserve que (8.64) soit vérifié, on peut trouver une solution (et donc une infinité de solutions définies à une constante près) en travaillant sur un espace supplémentaire dans $H^1(\Omega)$ à celui des fonctions constantes. Typiquement on peut travailler

dans l'espace des fonctions à moyenne nulle, que l'on note $\mathcal{U}_m$ pour lequel, le théorème D.12 assure l'existence d'une constante de Poincaré.

Pour résumer :

$\rightsquigarrow$ Si $\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,dS \neq 0$, il n'y a pas de solution.

$\rightsquigarrow$ Si $\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,dS = 0$, il y a une infinité de solutions, de la forme $u_m + r$, où $u \in \mathbb{R}$ et u_m est l'unique solution de la formulation variationnelle :

Trouver $u \in \mathcal{U}_m$ tel que $\forall\, v \in \mathcal{U}_m$:

$$\int_\Omega \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(v)\,dx = \int_\Omega v f dx + \int_{\partial\Omega} v\, g\, dS \tag{8.65}$$

8.4.4 Problème à conditions limites de Robin (Fourier)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{grad}(u) \cdot n = g - \mu\, u \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8.66}$$

Pour simplifier, on suppose que μ est une constante strictement positive et $g \in L^2(\partial\Omega)$. La formulation variationnelle s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega v\,\Delta u\,dx &= \int_\Omega (\text{div}(v\,\text{grad}(u)) - \text{grad}(u)\cdot\text{grad}(v))\,dx \\ \int_\Omega \text{grad}(u)\cdot\text{grad}(v)\,dx &= \int_{\partial\Omega} v\,\text{grad}(u)\cdot n\,dS = \int_{\partial\Omega} v\,g - \mu\, v u\,dS \end{aligned} \tag{8.67}$$

La formulation variationnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall\, v \in H^1(\Omega) \\ &\int_\Omega \text{grad}(u)\cdot\text{grad}(v)\,dx + \int_{\partial\Omega} \mu\, v\, u\, dS = \int_{\partial\Omega} v\, g\, dS \end{aligned} \tag{8.68}$$

On voit que la condition de Robin a une répercussion sur la forme bilinéaire. Le théorème de Cauchy-Schwarz et la continuité de l'application trace dans $H^1(\Omega)$ permettent de conclure à la continuité des formes linéaires et bilinéaires. Pour la coercivité, il est nécessaire d'utiliser la généralisation de l'inégalité de Poincaré donnée dans le théorème D.14.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

8.5 Techniques d'approximation de Ritz-Galerkin

Si les résultats précédents donnent l'existence et l'unicité de la solution faible, ils n'indiquent pas comment la calculer. On va voir ici que la formulation faible permet de définir des techniques d'approximation très efficaces. Considérons donc une formulation faible de la forme :

$$\text{Trouver } u \text{ dans } H \text{ tel que, pour tout } v \in H : a(u, v) = l(v) \tag{8.69}$$

ce qui est équivalent, si a est symétrique, à la formulation énergétique :

$$\text{Trouver } u \text{ dans } H \text{ tel que, pour tout } v \in H : J(u) \leqslant J(v) \text{ avec } J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \tag{8.70}$$

où H est un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue coercive, l une forme linéaire continue.

Le principe de l'approximation consiste à travailler dans un sous-espace vectoriel de H de dimension finie, que l'on désigne par V_h.

On introduit le problème approché suivant :

$$\text{Trouver } u_h \text{ dans } V_h \text{ tel que, pour tout } v \in V_h : a(u_h, v) = l(v) \tag{8.71}$$

ce qui est équivalent, si a est symétrique, à la formulation énergétique :

$$\text{Trouver } u_h \text{ dans } V_h \text{ tel que, pour tout } v \in V_h : J(u_h) \leqslant J(v) \tag{8.72}$$

L'existence et l'unicité de la solution de la formulation approchée (et l'équivalence énergétique dans le cas symétrique) sont obtenues par application du théorème de Lax-Milgram (ou Stampacchia dans le cas symétrique) dans le cas où K est un sous-espace vectoriel. En particulier, cela signifie que, si la solution u appartient à V_h, alors l'approximation conduira à la solution exacte.

D'après ce qui précède, il est clair que u_h est la meilleure solution dans V_h au sens de l'énergie dans le cas symétrique, c'est aussi celle qui, dans tous les cas, rend l'erreur orthogonale à V_h (au sens de a). En effet, en prenant le problème faible de base testé dans V_h, on obtient :

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \ \forall v_h \in V_h \tag{8.73}$$

On en déduit le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_H^2 \leqslant a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h), \ \forall v_h \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + \underbrace{a(u - u_h, v_h - u_h)}_{=0} \\ &\leqslant M \|u - u_h\|_H \|u - v_h\|_H \\ \|u - u_h\|_H &\leqslant \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_H, \ \forall v_h \in V_h \end{aligned} \tag{8.74}$$

Proposition 8.12. *Lemme de Céa*

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_H \tag{8.75}$$

Ce lemme est fondamental, car il permet de relier la qualité de l'approximation de l'EDP (caractérisée par les constantes α et M) à celle de l'approximation des fonctions de H par des fonctions de V_h. Il permet donc de développer des techniques d'approximation relativement génériques, il suffit pour cela de s'assurer que l'espace V_h permet de bien approcher les fonctions de H.

Il reste à détailler le calcul pratique de la solution approchée. Comme V_h est un espace de dimension finie, il possède une base finie $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$. On décompose alors la solution sur cette base :

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i \phi$$

La formulation faible s'écrit alors :

$$\text{Trouver } (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que, pour tout } j \in \{1, \ldots, n\} : a\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \phi_i, \phi_j\right) = l(\phi_j) \tag{8.76}$$

En utilisant la bilinéarité de a, on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ \ldots\ a(\phi_i, \phi_j)\ \ldots \\ \vdots \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ l(\phi_j) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{F} \tag{8.77}$$

La matrice A hérite des propriétés de la forme bilinéaire a : elle est symétrique, définie positive (grâce à la coercivité). Un tel système peut être résolu par une factorisation de Cholesky ou un gradient conjugué.

Il existe des techniques permettant de construire des bases de sous-espaces vectoriels de dimension finie pour les espaces $H^1(\Omega)$ pour des domaines Ω de forme très générale, la plus célèbre d'entre elles est la méthode des éléments finis.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Exercices

8.1 Propriétés de $H^1(\Omega)$ sur un intervalle

Étude de $H^1(I)$ avec $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ éventuellement non borné.

1. On cherche ici à montrer que si $u \in H^1(I)$, alors $u \in C^0(I)$, et pour $(x, x_0) \in I^2$: $u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'(t)dt$.

   À cet effet, on introduit la fonction qui, à tout x de I, associe $u_0(x) = \int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt$. Montrer que u_0 est bien définie et qu'elle est uniformément continue, puis que $u' - u_0' = 0$ au sens des distributions. On admettra que cela implique l'existence d'une constante réelle c telle que : $u - u_0 \underset{pp}{=} c$.

2. Montrer que, pour I borné, la fonction qui à $f \in H^1(I)$ associe $f(a)$ (trace à gauche) est une forme linéaire continue sur $H^1(I)$. En déduire que $H_0^1(I)$ est un sous-espace fermé de $H^1(I)$.

3. Montrer que pour $x_0 \in I$, $\delta_{x_0} \in (H_0^1(I))'$. On pourra utiliser le théorème de Riesz et montrer qu'il existe une fonction f de $H_0^1(I)$ telle que $< \delta_{x_0}, \phi >= (f, \phi)_{H^1}$.

8.2 Formulation variationnelle du problème de Laplace 1D

On s'intéresse à la recherche, par une méthode variationnelle, de la fonction u vérifiant

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad x \in]0, 1[, \quad f \text{ donnée dans } L^2(]0, 1[), \quad \text{avec} \quad u(0) = u(1) = 0.$$

1. On cherche $u \in H_0^1(]0, 1[)$ solution du problème différentiel ci-dessus. Montrer que u est solution du problème variationnel :

   $$\text{Trouver } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ tel que : } a(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1(]0, 1[)$$

   On explicitera, pour tout (u, v) de $H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[)$, $a(u, v)$ et $L(v)$.

2. Montrer que a est une forme bilinéaire continue, symétrique, et coercive sur $H_0^1(]0, 1[)$, et que L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(]0, 1[)$.

3. Montrer directement (sans utiliser le théorème de Lax-Milgram), l'unicité, puis l'existence de la solution du problème variationnel (on pourra montrer que l'application

   $$v \in H_0^1(]0, 1[) \mapsto \sqrt{a(v, v)}$$

est une norme équivalente à la norme H^1 sur $H_0^1(]0,1[)$, puis utiliser le théorème de Riesz).

4. Montrer que le problème variationnel est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(]0,1[) \text{ tel que, pour tout } v \in H_0^1(]0,1[) : I(u) \leqslant I(v),$$
$$\text{avec : } I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$$

5. Soit V_N un sous-espace vectoriel de $H_0^1(]0,1[)$ de dimension $N \in \mathbb{N}^\star$ finie.
   (a) Montrer que la meilleure approximation de u dans V_N, au sens de la norme

$$v \mapsto \sqrt{a(v,v)} = \|v\|_1$$

   est $u_N \in V_N$ tel que : $\quad a(u_N, v) = L(v), \quad \forall\, v \in V_N.$

   (b) Soit $(\varphi_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ une base de V_N. Donner le système linéaire permettant de déterminer u_N, et montrer que ce système est de Cramer.

Pour aller plus loin

Un prolongement de cet exercice et son corrigé sont en accès libre sur le site www.dunod.com

8.3 Étude du domaine de coercivité d'une forme bilinéaire paramétrée

On travaille sur le domaine régulier borné $\Omega \in \mathbb{R}^d$ et on étudie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} -\Delta u + c\,u &= f \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{8.78}$$

où c est une fonction positive bornée (i.e. $c \in L^\infty(\Omega)$ et $c \geqslant 0$). Pour simplifier, on pourra supposer c continue.

On veut montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$ au moyen d'une approche variationnelle.

1. Montrer que l'équation (8.78) conduit à la formulation variationnelle suivante :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que, pour tout } v \in H_0^1(\Omega) :$$
$$a(u,v) = \int_\Omega \text{grad}(u)\cdot\text{grad}\, v\, dx + \int_\Omega c\,u\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx = l(v), \tag{8.79}$$

2. Montrer que a est une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$, et l est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

3. En déduire l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (8.79).
4. Montrer que la condition $c \geqslant 0$ peut être améliorée en $c > -\alpha$, où α est une constante positive à déterminer.

Corrigés

8.1 1. Il faut vérifier que u_0 est bien définie, autrement dit que u' est intégrable sur I :

$$\begin{aligned}\int_{[x_0,x]} |u'|\,dt &\leqslant \int_{[x_0,x]} 1|u'|\,dt \\ &\leqslant \left(\int_{[x_0,x]} 1^2\,dt \int_{[x_0,x]} |u'|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ &\leqslant |x-x_0|\left(\int_I |u'|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = |x-x_0|\,\|u'\|_{L^2(I)}\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction u_0 est bien définie.

Un calcul similaire conduit à la continuité uniforme :

$$\begin{aligned}|u_0(x)-u_0(y)| &= \left|\int_{[x_0,x]} u'\,dt - \int_{[x_0,y]} u'\,dt\right| = \left|\int_{[y,x]} u'\,dt\right| \\ &\leqslant \int_{[y,x]} |u'|\,dt \leqslant |x-y|\,\|u'\|_{L^2(I)}\end{aligned}$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$, alors :

$$\begin{aligned}\langle u_0', \phi\rangle &= -\langle u_0, \phi'\rangle \\ &= -\int_I u_0\phi'\,dx = -\int_I \int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt\,\phi'(x)dx \\ &= -\int_a^{x_0}\int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt\,\phi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{b}\int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt\,\phi'(x)\,dx\end{aligned}$$

où on a décomposé $I = [a, x_0] \cup [x_0, b]$. On raisonne sur la première intégrale, comme $(x,t) \mapsto u'(t)\,\phi'(x)$ est intégrable sur le domaine triangulaire $x \in [a, x_0]$ et $t \in [x_0, x]$, on peut utiliser le théorème de Fubini et intégrer dans l'ordre le

mieux adapté :

$$\int_{x\in[a,x_0]}\int_{t\in[x_0,x]} u'(t)\,\phi'(x)\,dt\,dx = -\int_{t\in[a,x_0]}\int_{x\in[a,t]} u'(t)\,\phi'(x)\,dx\,dt$$
$$= -\int_{t\in[a,x_0]} u'(t)\int_{x\in[a,t]}\phi'(x)\,dx\,dt$$
$$= -\int_{t\in[a,x_0]} u'(t)\phi(t)\,dt$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$\langle u_0', \phi\rangle = \int_{t\in I} u'(t)\,\phi(t)\,dt = \langle u', \phi\rangle$$

Donc $(u_0' - u') = 0$ au sens des distributions. D'après l'énoncé, cela implique : $u - u_0 \underset{pp}{=} c$ constante. Comme u_0 et c, u est donc (la classe d') une fonction continue, et on peut identifier u avec $u(x_0) + u_0$.

2. On travaille sur $I = [a, b]$, qui est un intervalle borné. On introduit la forme trace à gauche :

$$\gamma_a : f \in H^1(]a,b[) \mapsto f(a) = f(x_0) + \int_{[x_0,a]} f'(t)\,dt$$

Comme f est uniformément continue, γ_a existe. C'est clairement une forme linéaire. Il reste à prouver la continuité :

$$|\gamma_a(f)| = |f(a)| = \left|f(x_0) + \int_{[x_0,a]} f'(t)\,dt\right|$$
$$\leqslant |f(x_0)| + \left|\int_{[x_0,a]} f'(t)dt\right| \leqslant |f(x_0)| + \int_{[x_0,a]} \left|f'(t)\right|\,dt$$
$$\leqslant |f(x_0)| + \int_{[a,b]} \left|f'(t)\right|\,dt$$
$$\leqslant |f(x_0)| + \sqrt{|b-a|}\left(\int_{[a,b]} \left|f'\right|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

où on a utilisé la positivité de $|f'|$ pour étendre le domaine d'intégration, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On intègre alors sur $[a, b]$:

$$\begin{aligned}
|f(a)| \int_a^b 1\, dx_0 &\leqslant \int_a^b |f(x_0)|\, dx_0 + \sqrt{|b-a|}\, \|f'\|_{L^2}^2 \int_a^b 1\, dx_0 \\
|f(a)|\, |b-a| &\leqslant \sqrt{|b-a|}\left(\int_a^b |f(x_0)|^2\, dx_0\right)^{1/2} + |b-a|^{\frac{3}{2}} \|f'\|_{L^2} \\
|f(a)| &\leqslant |b-a|^{-\frac{1}{2}}\, \|f\|_{L^2} + |b-a|^{+\frac{1}{2}} \|f'\|_{L^2} \\
&\leqslant \max\left(|b-a|^{-\frac{1}{2}}, |b-a|^{+\frac{1}{2}}\right) \left(\|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}\right)
\end{aligned}$$

Par convexité de la fonction carré, on a pour tout couple de réels (a, b) :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

ce qui implique

$$\left(\|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}\right) \leqslant \sqrt{2}\, \sqrt{\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2} = \sqrt{2}\, \|f\|_{H^1}^2$$

On arrive donc finalement à majorer $|\gamma_a(f)|$ par $C\|f\|_{H^1}^2$ (où C est une constante), ce qui signifie que γ_a est continue sur $H^1(]a, b[)$.
Par ailleurs :

$$H_0^1(I) = \ker(\gamma_a) \cap \ker(\gamma_b)$$

est donc l'intersection de deux sous-espaces vectoriels fermés (image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue).

3. On veut montrer que δ_{x_0} est dans le dual de $H_0^1(I)$. Comme $H_0^1(I)$ est un espace de Hilbert, on peut utiliser le théorème de Riesz et chercher $f \in H_0^1(I)$ telle que, pour tout ϕ de $H_0^1(I)$:

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0) = (f, \phi)_{H^1} = \int_I f(t)\, \phi(t)\, dt + \int_I f'(t)\, \phi'(t)\, dt$$

On sait que f doit être continu, on va supposer qu'il est de plus deux fois dérivables par morceaux (sur $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$) ce qui permettra de trouver une solution. Sur les deux intervalles $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$ on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
\phi(x_0) &= \int_I f(t)\, \phi(t)\, dt + \int_I f'(t)\, \phi'(t)\, dt \\
&= \int_I f(t)\, \phi(t)\, dt - \int_a^{x_0} f''(t)\, \phi(t)\, dt + [f'\phi]_a^{x_0} - \int_{x_0}^b f''(t)\, \phi(t)\, dt + [f'\phi]_{x_0}^b \\
&= \int_a^{x_0} (f - f'')\phi(t)\, dt + \int_{x_0}^b (f - f'')(t)\, \phi(t)\, dt + \phi(x_0)\left(f'(x_0^-) - f'(x_0^+)\right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Pour que la relation soit vraie pour tout ϕ de H^1, il faut donc :

$$\begin{aligned} f'' - f &= 0 \qquad \text{sur }]a, x_0[\cup]x_0, b[\\ f'(x_0^-) - f'(x_0^+) &= 1 \qquad \text{sur }]a, x_0[\cup]x_0, b[\end{aligned}$$

sachant qu'en plus $f(a) = f(b) = 0$ puisque l'on est dans $H_0^1(]a, b[)$ et $f(x_0^-) = f(x_0^+)$. La fonction f est donc bien définie.
On peut donc exprimer δ_{x_0} comme un produit scalaire dans $H_0^1(I)$, c'est donc une forme linéaire.

8.2 1. On cherche $u \in H_0^1(]0, 1[)$ solution du problème continu :

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x) \quad \forall\, x \in]0, 1[, \quad \text{avec } f \in L^2(]0, 1[) \quad \text{et } u(0) = u(1) = 0.$$

On peut écrire :

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x)\, v(x) = f(x)\, v(x) \quad \forall\, v \in H_0^1(]0, 1[),\ \forall\, x \in]0, 1[$$

ce qui implique :

$$\int_0^1 -\frac{d^2u}{dx^2}(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[)$$

puis :

$$\left[-\frac{du}{dx}(x)\, v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{du}{dx}(x)\, \frac{dv}{dx}(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(]0, 1[).$$

Or :

$$\left[-\frac{du}{dx}(x)\, v(x)\right]_0^1 = 0, \quad \text{car} \quad v \in H_0^1(]0, 1[) \Longrightarrow v(0) = v(1) = 0.$$

Finalement, u est solution du problème variationnel :

Trouver $u \in H_0^1(]0, 1[)$ tel que, pour tout $v \in H_0^1(]0, 1[)$: $a(u, v) = L(v)$,

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} a(u, v) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\, \frac{dv}{dx}(x)\, dx \\ L(v) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \end{cases}$$

2. $\rightsquigarrow$ $a : H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[) \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\rightsquigarrow$ $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique : $\forall\, (u, v) \in H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[),\ a(u, v) = a(v, u)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

$\rightsquigarrow$ $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire : $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique et linéaire par rapport à chacune de ses deux variables :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u_1, u_2) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[),\ \forall v \in H_0^1(]0,1[),$$
$$a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v)$$

$\rightsquigarrow$ $a(\cdot,\cdot)$ est continue :

$$\forall (u,v) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[),$$
$$|a(u,v)| = \left| \int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\, \frac{dv}{dx}(x)\, dx \right| = \left| < u', v' >_{L^2} \right|$$
$$\leqslant \|u'\|_{L^2}\, \|v'\|_{L^2} \quad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$
$$\leqslant \|u\|_{H^1}\, \|v\|_{H^1}$$

Ainsi, pour tout (u,v) de $H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$:

$$|a(u,v)| \leqslant \|u\|_{H^1}\, \|v\|_{H^1}$$

Par suite, $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur $H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ $a(\cdot,\cdot)$ est H-coercive (ou H-elliptique) :

Montrons qu'il existe une constante $\alpha_0 > 0$ telle que, pour tout v de $H_0^1(]0,1[)$:

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) = \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}(x)\right)^2 dx = \|v'\|_{L^2}^2 \geqslant \alpha_0 \|v\|_{H^1}^2$$

Rappel : Inégalité de Poincaré :

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$,

$$\exists C > 0 / \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega |v(x)|^2\, dx \leqslant C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx$$
$$\text{ou encore :}\quad \|v\|_{L^2}^2 \leqslant C\, \|\nabla v\|_{L^2}^2$$

Ici, $\Omega =]0,1[$ est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}$. En particulier, on peut calculer la constante de Poincaré en utilisant le fait que :

$$v(x) = \int_a^x v'(t)\, dt$$

Il suffit de majorer le terme de droite à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis d'intégrer sur x (comme dans la question 1 de l'exercice 8.1) :

$$\exists C > 0 / \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ \|v\|_{L^2}^2 \leqslant C\, \|v'\|_{L^2}^2.$$

Or :

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 \implies \|v\|_{H^1}^2 \leqslant C\, \|v'\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 = (1+C)\, \|v'\|_{L^2}^2.$$

Par suite, en posant $\alpha_0 = \dfrac{1}{1+C} > 0$, on obtient :

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) \geqslant \alpha_0 \|v\|_{H^1}^2, \quad \text{car} \quad a(v,v) = \|v'\|_{L^2}^2.$$

$\rightsquigarrow$ $L : H_0^1(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ $L(\cdot)$ est linéaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (v_1, v_2) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[),\ L(\lambda v_1 + v_2) = \lambda L(v_1) + L(v_2)$$

$\rightsquigarrow$ $L(\cdot)$ est continue :

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),$$

$$|L(v)| = \left| \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \right| \leqslant \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

$$\leqslant \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}, \quad \text{car} \quad \|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$$

Finalement, $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, continue, symétrique et H-coercive sur $\left(H_0^1(]0,1[)\right)^2$, et $L(\cdot)$ est une forme linéaire, continue sur $H_0^1(]0,1[)$.

3. Montrons directement (sans utiliser le théorème de Lax-Milgram) l'unicité et l'existence de la solution du problème variationnel.

- Unicité :

  Supposons que u_1 et u_2 sont solutions du problème variationel. Alors :

$$\begin{cases} a(u_1, v) = L(v), & \forall v \in H_0^1(]0,1[) \\ a(u_2, v) = L(v), & \forall v \in H_0^1(]0,1[) \end{cases}$$

  Par linéarité de $L(\cdot)$ et bilinéarité de $a(\cdot,\cdot)$:

$$a(u_1 - u_2, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$$

  En prenant $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(]0,1[)$ ($H_0^1(]0,1[)$ espace vectoriel), on a $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$.

  Par coercivité de $a(\cdot,\cdot)$, il existe une constante $\alpha_0 > 0$ telle que :

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geqslant \alpha_0 \|u_1 - u_2\|_{H^1}^2$$

  D'où $\|u_1 - u_2\|_{H^1}^2 = 0 \implies u_1 - u_2 = 0_{H_0^1}$ par propriété de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

  On en déduit que $u_1 = u_2$: la solution est unique.

- Existence :

  L'application $a(\cdot,\cdot)$ étant une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive, car continue et H-coercive :

$$a(\cdot,\cdot) \text{ continue} \implies \exists M > 0 / \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) = |a(v,v)| \leqslant M \|v\|_{H^1}^2$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

$$a(\cdot,\cdot)\ H\text{-coercive} \implies \exists\, \alpha_0 > 0 \,/\, \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) \geqslant \alpha_0 \|v\|_{H^1}^2$$

$a(\cdot,\cdot)$ définit un produit scalaire, noté $(\cdot,\cdot)_1$, et, pour tout v de $H_0^1(]0,1[)$:

$$0 < \alpha_0 \|v\|_{H^1}^2 \leqslant a(v,v) \leqslant M \|v\|_{H^1}^2.$$

Ainsi, la norme associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_1$, notée $\|\cdot\|_1$, est équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$.

$H_0^1(]0,1[)$ est donc un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_1$, car $H_0^1(]0,1[)$ est un espace vectoriel normé complet pour la norme $\|\cdot\|_1$ (les limites des suites convergentes (donc de Cauchy) sont inchangées pour des normes équivalentes) et muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_1$.

De plus, $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(]0,1[)$. On est donc dans le cadre d'application du théorème de représentation de Riesz d'une forme linéaire :

$$\exists !\ u \in H_0^1(]0,1[) \,/\, L(v) = (u,v)_1 = a(u,v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[).$$

D'où l'existence (et l'unicité !) d'une solution au problème variationnel.

4. On veut montrer que $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[) \iff I(u) \leqslant I(v)$ $\forall v \in H_0^1(]0,1[)$.

$\boxed{\implies}$ On suppose u solution de :

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$$

Alors, pour tout v de $H_0^1(]0,1[)$:

$$\begin{aligned}
I(v) - I(u) &= \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) - \frac{1}{2} a(u,u) + L(u) \\
&= \frac{1}{2}\ a(v-u, v-u) + a(u,v) - a(u,u) - L(v-u), \\
&\qquad \text{(par linéarité de } L(\cdot) \text{ (et bilinéarité de } a(\cdot,\cdot)) \\
&= \frac{1}{2}\ a(v-u, v-u) + a(u, v-u) - L(v-u) \\
&= \frac{1}{2}\ a(v-u, v-u), \\
&\qquad \text{car } v-u \in H_0^1(]0,1[) \text{ (espace vectoriel) et,} \\
&\qquad a(u, v-u) = L(v-u) \\
&\geqslant 0 \\
&(= 0 \quad \text{si et seulement si} \quad u = v)
\end{aligned}$$

D'où :

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[) \implies I(u) \leqslant I(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose u solution de :

$$I(u) \leqslant I(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$$

Alors, pour tout réel α, et tout v de $H_0^1(]0,1[)$:

$$I(u+\alpha v) - I(u) = \frac{1}{2}\, a(u+\alpha v, u+\alpha v) - L(u+\alpha v) - \frac{1}{2}\, a(u,u) + L(u) \geqslant 0$$

ce qui implique :

$$\frac{1}{2}\, a(u,u) + \frac{1}{2}\, a(\alpha v, \alpha v) + a(u, \alpha v) - \frac{1}{2}\, a(u,u) - L(u) - L(\alpha v) + L(u) \geqslant 0$$

Par suite, pour tout réel α, et tout v de $H_0^1(]0,1[)$:

$$P_v(\alpha) = \alpha^2\, \frac{a(v,v)}{2} + \alpha\ (a(u,v) - L(v)) \geqslant 0 \text{ (polynôme du second degré)}$$

Il en résulte :

$$\Delta = (a(u,v) - L(v))^2 \leqslant 0 \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$$

puis :

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$$

Finalement :

$$I(u) \leqslant I(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[) \Longrightarrow a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$$

5. (a) La meilleure approximation de u dans V_N est l'élément u_N de V_N qui minimise la distance entre u et V_N au sens de la norme $\|\cdot\|_1$:

$$\|u - u_N\|_1 \leqslant \|u - v\|_1 \quad \forall v \in V_N.$$

u_N est donc la projection de u sur V_N au sens de la norme $\|\cdot\|_1$: $u_N = P_{V_N}(u)$.
D'après la caractérisation de la projection orthogonale (applicable, car V_N sous-espace vectoriel fermé de $H_0^1(]0,1[)$), on en déduit :

$$(u - u_N, v)_1 = 0 \quad \forall v \in V_N$$

soit :

$$(u_N, v)_1 = (u, v)_1 \quad \forall v \in V_N$$

(linéarité de $(\cdot,\cdot)_1$ par rapport à la première variable)

soit :

$$a(u_N, v) = (u, v)_1 = L(v) \quad \forall v \in V_N$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ce qui implique :

$$(u_N, v)_1 = (u, v)_1 \quad \forall v \in V_N$$

(linéarité de $(\cdot,\cdot)_1$ par rapport à la première variable)

puis :

$$a(u_N, v) = (u, v)_1 = L(v) \quad \forall v \in V_N$$

(d'après (4) appliquée à $v \in V_N \subset H_0^1(]0,1[)$)

On cherche donc u_N dans V_N tel que, pour tout v de V_N :

$$a(u_N, v) = L(v)$$

(b) Soit $(\varphi_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ une base de V_N. Comme u_N appartient à V_N, on peut l'écrire de manière unique sous la forme :

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} \tilde{u}_j \varphi_j$$

On a :

$$a(u_N, v) = L(v) \quad \forall v \in V_N$$

Or :

$$\varphi_i \in V_N \quad \forall i \in [\![1, N]\!]$$

C'est donc en particulier vrai pour :

$$v = \varphi_i \quad \forall i \in [\![1, N]\!]$$

Par suite, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$:

$$a(u_N, \varphi_i) = L(\varphi_i)$$

ce qui implique :

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{u}_j \; a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) \quad \forall i \in [\![1, N]\!]$$

En écrivant ces N équations sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & \dots & \dots & a(\varphi_N,\varphi_1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1,\varphi_N) & \dots & \dots & a(\varphi_N,\varphi_N) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{bmatrix}$$

On cherche alors x dans $\mathbb{R}^N$ tel que :

$$\mathbb{A}\, x = b$$

avec :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & \dots & \dots & a(\varphi_N,\varphi_1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1,\varphi_N) & \dots & \dots & a(\varphi_N,\varphi_N) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{bmatrix}$$

- $\mathbb{A}^T = \mathbb{A} \implies \mathbb{A}$ est symétrique.
- $x^T\, \mathbb{A}\, x = a(u_N, u_N) \quad \forall u_N = x^T\, \Phi \in V_N \quad$ où

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix}$$

Par suite :

$$x^T\, \mathbb{A}\, x \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \quad \implies \mathbb{A} \text{ est positive}$$

et :

$$\left[x^T\, \mathbb{A}\, x = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^N}\right] \quad \implies \mathbb{A} \text{ est définie}$$

Ainsi, la matrice $\mathbb{A}$ est symétrique, réelle, définie, positive : elle est donc diagonalisable, et toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Par conséquent :

$$\det(\mathbb{A}) \neq 0$$

et le système linéaire correspondant est un système de Cramer. Il existe une unique solution à un problème pareil.

8.3 1. On cherche une fonction u nulle sur le bord du domaine, ce qui correspond à l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$. Soit alors un champ test v dans $H_0^1(\Omega)$.

$$-\int_\Omega \Delta u\, v\, dx + \int_\Omega c\, u\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx$$

$$\int_\Omega \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(v)\, dx + \int_\Omega c\, u\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, v$$

Le dernier terme est éliminé, car v s'annule sur $\partial\Omega$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

2. a est une forme bilinéaire symétrique et l une forme linéaire. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et les propriétés de la norme, on obtient :

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \left|\int_\Omega f\,v\,dx\right| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \\
|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \operatorname{grad}(u)\cdot\operatorname{grad}(v)\,dx + \int_\Omega c\,u\,v\,dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_\Omega \operatorname{grad}(u)\cdot\operatorname{grad}(v)\,dx\right| + \left|\int_\Omega c\,u\,v\,dx\right| \\
&\leqslant \|\operatorname{grad}(u)\|_{L^2}\|\operatorname{grad}(v)\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leqslant (1+\|c\|_{L^\infty})\,\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

ce qui prouve les continuités.

L'inégalité de Poincaré implique :

$$\|v\|_{H^1} \leqslant \sqrt{1+C_p^2}\,\|\operatorname{grad}(v)\|_{L^2}$$

Par suite, si $c \geqslant 0$, on peut en déduire la coercivité dans H^1 :

$$a(v,v) = \int_\Omega (\operatorname{grad}(v))^2\,dx + \int_\Omega c\,v^2\,dx \geqslant \int_\Omega (\operatorname{grad}(v))^2\,dx \geqslant \frac{1}{1+C_p^2}\,\|v\|_{H^1}^2$$

3. On entre dans les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (ou même Stampacchia) dans un espace de Hilbert, on a donc existence et unicité de la solution.
4. On reprend les calculs sur la coercivité :

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_\Omega (\operatorname{grad}(v))^2\,dx + \int_\Omega c\,v^2\,dx \\
&\geqslant \int_\Omega (\operatorname{grad}(v))^2\,dx - \alpha\int_\Omega v^2\,dx \geqslant \frac{1}{1-\alpha C_p^2}\,\|\operatorname{grad}(v)\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

La constante devant être positive, il en résulte :

$$\alpha \leqslant \frac{1}{C_p^2}$$

RAPPELS D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE

A

On se place dans $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), et on note $\mathbf{M}$ un point de l'espace de coordonnées (x, y, z), et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$ de composantes (u_x, u_y, u_z).

Le point $\mathbf{M} + \vec{u}$ a pour coordonnées $(x + u_x, y + u_y, z + u_z)$. La valeur au point $\mathbf{M}$ d'une fonction f de l'espace sera notée indifféremment $f(x, y, z)$ ou $f(\mathbf{M})$.

Afin d'alléger les notations, le point où est évalué une fonction vectorielle pourra être noté en indice :

$$\begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \tag{A.1}$$

$||\vec{h}||$ représente une norme de $\vec{h}$, typiquement la norme euclidienne ($\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$).

A.1 FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

A.1.1 Définitions

Ω étant un domaine ouvert† de $\mathbb{R}^2$, on définit une fonction sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f \;:\; \Omega &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{M} &\mapsto f(\mathbf{M}) \end{aligned} \tag{A.2}$$

On dit que la fonction est *continue* en $\mathbf{M}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall \vec{h} \text{ avec } ||\vec{h}|| \leqslant \eta, |f(\mathbf{M}_0) - f(\mathbf{M}_0 + \vec{h})| \leqslant \varepsilon \tag{A.3}$$

On rappelle que la continuité de la fonction implique celle des fonctions partielles ($x \mapsto f(x, y_0)$ à y_0 fixé), mais que la réciproque est fausse.

La fonction est *différentiable* en $\mathbf{M}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ s'il existe une forme linéaire notée $df_{\mathbf{M}_0}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall \vec{h}, f(\mathbf{M}_0 + \vec{h}) = f(\mathbf{M}_0) + df_{\mathbf{M}_0}(\vec{h}) + o(||\vec{h}||) \tag{A.4}$$

La différentiabilité implique l'existence de dérivées partielles et

$$df_{\mathbf{M}_0}(\vec{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\mathbf{M}_0} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}(\mathbf{M}_0)\vec{h} \tag{A.5}$$

où on reconnaît le gradient de f au point $\mathbf{M}_0$, noté $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}(\mathbf{M}_0)$.

†. La continuité suppose que l'on peut former des boules autour de chaque point du domaine.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

De manière générique, on note :

$$df_{\mathbf{M}_0} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{A.6}$$

A.1.2 Changement de variables

Soit un jeu de deux coordonnées (x, y) et un changement de variables (X, Y) réalisant un C^1-difféomorphisme : $(x, y) \mapsto (X, Y)$ est de classe C^1, inversible, l'application inverse est également de classe C^1 et la matrice jacobienne suivante a un déterminant non nul :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial X} \\ \dfrac{\partial x}{\partial Y} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{pmatrix}, \qquad \det(J) \neq 0 \tag{A.7}$$

On considère une fonction f de $\mathbf{M} = (x, y)$, différentiable, et une fonction F de $\mathbf{N} = (X, Y)$ telle que $f(x, y) = F(X, Y)$.

On a alors :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial X} \\ \dfrac{\partial F}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial X} \\ \dfrac{\partial x}{\partial Y} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

Si f est deux fois différentiable, on a :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial X^2} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial x}{\partial X}\right)^2 & 2\dfrac{\partial x}{\partial X}\dfrac{\partial y}{\partial X} & \left(\dfrac{\partial y}{\partial X}\right)^2 \\ \dfrac{\partial x}{\partial X}\dfrac{\partial x}{\partial Y} & \left(\dfrac{\partial x}{\partial X}\dfrac{\partial y}{\partial Y} + \dfrac{\partial x}{\partial Y}\dfrac{\partial y}{\partial X}\right) & \dfrac{\partial y}{\partial X}\dfrac{\partial y}{\partial Y} \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial Y}\right)^2 & 2\dfrac{\partial x}{\partial Y}\dfrac{\partial y}{\partial Y} & \left(\dfrac{\partial y}{\partial Y}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial X^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial X \partial Y} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial Y^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

À titre d'exemple, le calcul suivant est détaillé :

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right]\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right]\frac{\partial y}{\partial X} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial X}\right]\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial y}{\partial X}\right]\frac{\partial x}{\partial X} \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial x}{\partial X}\right]\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial X}\right]\frac{\partial y}{\partial X} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial X^2}
\end{aligned}$$

A.1.3 Théorème des fonctions implicites

Ce théorème prouve que pour une fonction f différentiable et bijective, une équation de la forme $f(x_1, x_2, z) =$ Constante permet (localement) de définir z comme une fonction de (x_1, x_2) aux points (x_1, x_2, z) où $\frac{\partial f}{\partial z}(x_1, x_2, z) \neq 0$.

De plus, en exploitant le fait que $df = 0$, on obtient :

$$z = Z(x_1, x_2) \text{ et } \frac{\partial Z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(x_1, x_2, z) \text{ pour } i = 1, 2 \qquad \text{(A.10)}$$

A.2 Éléments de géométrie

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un système de coordonnées (x, y, z) orthonormal.

A.2.1 Courbes

Une courbe continue C est un ensemble de points dont les coordonnées dépendent continûment d'un paramètre t. On écrit :

$$C : t \mapsto \mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_t \qquad \text{(A.11)}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Si les fonctions sont C^1 et que les dérivées par rapport à t ne s'annulent pas simultanément, on peut définir le vecteur tangent $\vec{v}(t_0)$ au point $\mathbf{M}(t_0)$:

$$\vec{v}(t_0) = \frac{d\mathbf{M}}{dt}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{t_0} \tag{A.12}$$

Une courbe telle qu'en tout point $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \neq 0$ est dite ***régulière***, un paramétrage privilégié existe pour ces courbes, il s'agit de l'***abscisse curviligne*** s définie par la relation :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \|\vec{v}(t)\|dt \tag{A.13}$$

L'abscisse curviligne permet d'obtenir des vecteurs tangents unitaires, et donne un repère naturel en chaque point de la courbe (le repère de Frenet) permettant de calculer courbure et torsion.

Remarque A.1

i. Dans l'espace $\mathbb{R}^2$, une courbe peut être définie (au moins localement) par une équation implicite $f(x, y) =$ Constante.

ii. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, une courbe peut être définie comme l'intersection de deux surfaces.

Soit f une fonction de (x, y, z) et C une courbe donnée sous forme paramétrique par $\mathbf{M}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. On définit la restriction F de f sur C par $F(t) = f(\mathbf{M}(t))$. On peut calculer la dérivée de F le long de C par dérivation composée :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{df(\mathbf{M}(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}(\mathbf{M}(t))\frac{d\mathbf{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}_{\mathbf{M}(t)} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}_t \tag{A.14}$$

où l'on reconnaît le gradient de f (noté $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}$) appliqué au vecteur tangent à la courbe.

A.2.2 Surfaces

Une surface $\mathcal{S}$ est un ensemble de points dont les coordonnées dépendent continûment de deux paramètres (u, v). On écrit :

$$\mathcal{S} : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(u,v)} \tag{A.15}$$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, une surface $\mathcal{S}$ peut être définie (au moins localement) par une équation implicite $f(x, y, z) = \text{Constante}$.

En différenciant cette expression au point $\mathbf{M}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la surface, on obtient :

$$0 = df_{\mathbf{M}_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\mathbf{M}_0} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

Pour qu'un vecteur (dx, dy, dz) appartienne au plan tangent à $\mathcal{S}$ en $\mathbf{M}_0$, il doit être orthogonal au gradient de f en $\mathbf{M}_0$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ÉLÉMENTS D'ANALYSE HILBERTIENNE

B

L'objectif de cette annexe est de rappeler les principales propriétés des structures les plus utiles dans cet ouvrage. Pour un exposé plus complet, contenant notamment l'étude des espaces duaux, le lecteur est renvoyé aux ouvrages de référence [3, 4, 17, 18].

Dans ce qui suit, E désigne un espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$.

B.1 DÉFINITIONS

B.1.1 Norme

Définition B.1

On appelle ***norme*** sur E une application $\|.\|$ vérifiant les quatre axiomes suivants :

i. ***Positivité*** :

$$\forall x \in E : \|x\| \geqslant 0 \tag{B.1}$$

ii. ***Homogénéité*** :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \tag{B.2}$$

iii. ***Inégalité triangulaire*** (ou sous-additivité, ou inégalité de Minkowski†) :

$$\forall (x, y) \in E \times E : \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \tag{B.3}$$

iv. ***Séparation*** :

$$\forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{B.4}$$

Une norme définit une ***topologie*** (dite ***topologie*** « ***forte*** »).
Les notions de convergence, de limite, de continuité, sont donc tributaires du choix de la norme. Un même ensemble peut avoir des propriétés très différentes suivant

†. Hermann Minkowski ((1864-1909), mathématicien et physicien théoricien allemand. Il a développé des méthodes géométriques afin de simplifier la résolution de problèmes de théorie des nombres, de physique mathématique, mais, aussi, de relativité.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

la norme retenue. Néanmoins, deux normes peuvent définir les mêmes topologies si elles sont équivalentes.

Définition B.2

Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que

$$\forall x \in E,\ \alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1 \tag{B.5}$$

Proposition B.1. *En dimension finie toutes les normes sont équivalentes (ce qui fait qu'il n'est pas nécessaire de les spécifier).*

Remarque B.1

Une norme est un cas particulier de distance, en effet on peut poser $d(x, y) = \|x - y\|$ (d est une application positive qui vérifie l'inégalité triangulaire et n'est nulle que si $x = y$). Outre des propriétés topologiques, une norme fournit donc des propriétés métriques (comme la complétude).

Définition B.3

On appelle ***espace vectoriel normé*** un espace E muni d'une norme $\|.\|$.

B.1.2 Produits scalaire et hermitien

Définition B.4

On appelle ***produit scalaire*** sur E une application φ ***bilinéaire***, ***symétrique***, ***définie positive***, i.e. telle que :

i. ***Bilinéarité :*** $\forall\ ((x, y), (x', y')) \in (E \times E)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \varphi(\lambda x + x', y) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ \varphi(x, \lambda y + y') = \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x, y') \end{cases} \tag{B.6}$$

ii. ***Symétrie :***

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ :\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x) \tag{B.7}$$

iii. ***Caractère défini positif :***

$$\begin{aligned} \forall x \in E\ &: \varphi(x, x) \geqslant 0 \\ &\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Définition B.5

On appelle ***produit hermitien*** sur E une application Φ ***sesquilinéaire***, ***hermitienne***, ***définie positive***, i.e. telle que :

i. ***Sesquilinéarité :***

$\forall\ ((x, y), (x', y')) \in (E \times E)^2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \Phi(\lambda\, x + x', y) = \lambda\, \Phi(x, y) + \varphi(x', y) \\ \Phi(x, \lambda\, y + y') = \Phi(x, y) + \overline{\lambda}\, \Phi(x, y') \end{cases} \tag{B.9}$$

ii. ***Caractère hermitien :***

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ :\ \Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)} \tag{B.10}$$

iii. ***Caractère défini positif :***

$$\begin{aligned} \forall x \in E\ &: \Phi(x, x) \geqslant 0 \\ &\Phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Si φ est un produit scalaire (ou hermitien) alors $x \mapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$ est une norme que l'on note $\|x\|$. On a alors le résultat suivant :

Théorème B.2. ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***

$$\forall (x, y) \in E \times E\ :\ |\varphi(x, y)| \leqslant \|x\|\, \|y\| \tag{B.12}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si les deux vecteurs sont liés.

Démonstration. On se place dans le cas où $x \neq 0$ et $y \neq 0$, l'inégalité étant toujours vérifiée lorsque x ou y sont nuls.

Pour tout réel t :

$$\|x + t\, y\|^2 = \varphi(x + t\, y, x + t\, y) = \|x\|^2 + 2\, t\, \varphi(x, y) + t\, \|y\|^2$$

On obtient ainsi un trinôme du second degré en t, qui est toujours positif : son discriminant réduit doit donc être négatif ou nul :

$$\varphi(x, y)^2 - \|x\|^2\, \|y\|^2 \leqslant 0$$

ce qui conduit à :

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \|x\|\, \|y\|$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Si le discriminant est nul, alors, le trinôme en t admet une racine double, et il existe alors un réel t tel que :

$$\|x + t\,y\|^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x + t\,y = 0$$

Les vecteurs x et y sont alors liés.

Réciproquement, si x et y sont liés, il existe un réel λ tel que :

$$u = \lambda\, v \qquad \text{et alors } |\varphi(x, y)| = |\lambda|\,\|x\|^2 = \|x\|\,\|y\| \qquad \blacksquare$$

B.1.3 Espaces préhilbertiens

Définition B.6

On appelle espace ***préhilbertien*** un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (ou hermitien).

Théorème B.3. *Un espace vectoriel normé E peut être muni d'une structure d'espace préhilbertien si et seulement s'il vérifie* **l'identité du parallélogramme** *:*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{B.13}$$

Démonstration. La vérification montrant qu'un espace dont la norme est issue d'un produit scalaire vérifie l'identité est immédiate.

Pour la réciproque, on dispose des identités de polarisation. $\blacksquare$

Proposition B.4. Identité de polarisation - cas réel

Pour un espace sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'identité du parallélogramme, l'application $(.,.)$:

$$\begin{aligned} &E \times E \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto (x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \end{aligned} \tag{B.14}$$

est un produit scalaire sur E.

Proposition B.5. Identité de polarisation - cas complexe

Pour un espace sur $\mathbb{C}$ vérifiant l'identité du parallélogramme, l'application $\Phi(.,.)$:

$$\begin{aligned} &E \times E \to \mathbb{C} \\ &(x, y) \mapsto \Phi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + i\,y\|^2 - i\|x - i\,y\|^2\right) \end{aligned} \tag{B.15}$$

est un produit hermitien sur E.

Démonstration. On ne fait la démonstration que dans le cas réel.

La positivité et le caractère défini sont directement hérités de la norme puisque

$$(x, x) = \|x\|^2$$

La symétrie vient de l'homogénéité.

La bilinéarité est due à l'égalité du parallélogramme, on peut montrer, en particulier, la linéarité à gauche, en remarquant d'abord que :
$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E$:

$$\begin{aligned}
(x, z) + (y, z) &= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\left\{2\left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2\right) - 2\left(\|y-z\|^2 + \|x-z\|^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{8}\left\{\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2 - \|x+y-2z\|^2 - \|x-y\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{8}\left\{\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{8}\left\{2^2\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - 2^2\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right\} \\
&= 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right)
\end{aligned}$$

En prenant $y = 0$, on voit que $\forall x,\ (x, z) = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)$, on a donc $2\left(\frac{x+y}{2}, z\right) = (x+y, z)$, ce qui conduit à l'additivité à gauche $(x, z) + (y, z) = (x + y, z)$.

Quitte à poser $y = x$ et à répéter l'opération, on en déduit que pour tout entier naturel p :

$$p\,(x, z) = (p\,x, z)\,,\ \forall p \in \mathbb{N}$$

Pour q non-nul, on obtient en posant $x = \frac{y}{q}$:

$$\forall q \in \mathbb{N}^*,\ q\left(\frac{y}{q}, z\right) = \left(q\,\frac{y}{q}, z\right) = (y, z) \Rightarrow \left(\frac{y}{q}, z\right) = \frac{1}{q}(y, z)$$

On en déduit alors, pour tout scalaire rationnel de la forme $\frac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$:

$$\left(\frac{p}{q}\,x, z\right) = \frac{p}{q}\,(x, z)$$

ce résultat s'étend à tout scalaire réel en utilisant la densité† de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité des applications $\frac{p}{q} \mapsto \left\|\frac{p}{q}\,x + z\right\|$ et $\frac{p}{q} \mapsto \left\|\frac{p}{q}\,x - z\right\|$.

†. Tout réel est limite d'une suite de rationnels

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

B.1.4 Espaces séparables

Un ensemble est dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, autrement dit si on peut « numéroter » (jusqu'à l'infini) ses éléments. Les ensembles dénombrables sont les plus « petits » ensembles infinis, ils peuvent néanmoins approcher des ensembles beaucoup plus grands. Parmi les ensembles dénombrables, citons $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et tous leurs produits cartésiens du type $\mathbb{Q}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Définition B.7

Un espace est dit ***séparable*** s'il possède un sous-ensemble dénombrable dense.

Exemple B.1

$\mathbb{Q}$ étant dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est séparable. Par extension, $\mathbb{R}^d$ est séparable. Les espaces L^p pour $1 \leqslant p < \infty$ sont séparables (voir le chapitre C).

B.2 Complétude

B.2.1 Suites

Une norme permet de définir une topologie (forte) et donc une notion de convergence.

Définition B.8

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ converge dans E vers une limite ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0 : \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon \tag{B.16}$$

Définition B.9

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est une ***suite de Cauchy*** si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : n_0 \leqslant p \leqslant q \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leqslant \varepsilon \tag{B.17}$$

Remarque B.2

Une suite convergente est nécessairement une suite de Cauchy.

Exemple B.2

Considérons l'ensemble des rationnels, $\mathbb{Q}$, muni de la norme usuelle, i.e. la valeur absolue.

Pour tout rationnel q, on désigne par $\mathrm{E}(q)$ sa partie entière.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{1}{10^n}\,\mathrm{E}\left(\frac{10^n}{3}\right) \;,\quad b_n = \frac{1}{10^n}\,\mathrm{E}(10^n\pi)$$

sont bien des suites d'éléments de $\mathbb{Q}$; elles sont clairement des suites de Cauchy (pour $\varepsilon > 0$ donné, il suffit de choisir n_0 dans la définition précédente de sorte que $\varepsilon \geqslant 10^{-(n_0+1)}$).

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{Q}$ vers $\frac{1}{3}$; par contre, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (elle converge dans un espace plus grand, en l'occurrence $\mathbb{R}$, vers π).

B.2.2 Espace complet

Définition B.10

Un espace E est dit ***complet*** si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E.

Exemple B.3

D'après l'exemple précédent, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.

$\mathbb{R}$ peut être vu comme le plus petit espace contenant $\mathbb{Q}$ et rendant les suites de Cauchy à valeur dans $\mathbb{Q}$ convergentes.

B.2.3 Espace de Banach

Définition B.11

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ ***complet*** est appelé ***espace de Banach***.

Exemple B.4

K étant un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$, considérons l'espace $C^0(K)$ des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$.

i. Muni de la norme sup (ou norme $\|\cdot\|_{L^\infty(K)}$), $C^0(K)$ est complet : les suites de fonctions continues sur K, qui sont de Cauchy au sens de la norme sup convergent vers des fonctions continues[†].

$(C^0(K), \|\cdot\|_{L^\infty(K)})$ est donc bien un espace de Banach.

†. Il s'agit de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ii. Muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2(K)}$, $C^0(K)$ n'est pas complet, les suites de Cauchy convergeant dans un espace plus grand (en l'occurrence $L^2(K)$).

Proposition B.6. *Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$, les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sont des espaces de Banach.*

Démonstration. Voir le chapitre sur l'intégration de Lebesgue C. ■

B.2.4 Espaces de Hilbert

Définition B.12

On appelle ***espace de Hilbert*** un espace préhilbertien complet pour la norme associé à son produit scalaire.

Exemple B.5

$\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto xy$, et de la norme $x \mapsto |x|$, est un espace de Hilbert.

Exemple B.6

$\mathbb{R}^d$, muni du produit scalaire canonique

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

et de la norme

$$x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$$

est un espace de Hilbert.

Exemple B.7

L'espace des suites réelles de carré sommable

$$\ell_2 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$$

et de la norme

$$x \mapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}$$

est un espace de Hilbert.

Exemple B.8

Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f \bar{g}\, d\lambda$$

Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est qu'un cas particulier de l'inégalité de Hölder† (pour $p = q = 2$).

Remarque B.3

σ étant une fonction à valeurs positives, et Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on peut être également amené à travailler avec l'espace $L^2_\sigma(\Omega)$ des fonctions f telles que

$$\int_\Omega f^2 \sigma d\lambda < +\infty$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{L^2_\sigma(\Omega)} = \int_\Omega f \bar{g}\, \sigma\, d\lambda$$

B.3 Sommes hilbertiennes

Dans un espace de dimension finie, comme $\mathbb{R}^d$, on décrit facilement les éléments de l'espace par le choix d'une base appropriée. Malheureusement ces outils si pratiques n'existent plus en dimension infinie. En procédant par analogie, on a cherché à déterminer s'il n'était pas possible, en considérant des familles génératrices, infinies mais dénombrables, d'obtenir des propriétés similaires à celles qui existent en dimension finie.

Dans ce qui suit, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert, dont on notera $(.,.)$ le produit scalaire, et $\mathbb{I}$ un ensemble d'indices.

†. Otto Ludwig Hölder (1859-937), mathématicien allemand, qui travailla, notamment, sur les séries de Fourier, mais, aussi, sur la théorie des groupes : il est à l'origine du théorème de Jordan-Hölder sur les groupes finis, qui permet de retrouver l'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers. O. Hölder a aussi montré que la fonction Gamma n'était solution d'aucune équation algébrique.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

B.3.1 Orthogonalité

Définition B.13

Deux vecteurs h_1 et h_2 de $\mathcal{H}$ sont dits orthogonaux si

$$(h_1, h_2) = 0$$

Définition B.14

On appelle ***famille orthogonale*** un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

Définition B.15

Deux sous-espaces H_1 et H_2 de $\mathcal{H}$ sont dits ***orthogonaux*** si tous leurs vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Définition B.16

Pour tout ensemble $X \subset H$, on note $X^\perp$ l'ensemble des vecteurs qui lui sont orthogonaux. $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.

Proposition B.7. *Si V est un sous-espace vectoriel fermé de H : $(V^\perp)^\perp = V$ et $H = V \oplus V^\perp$.*

B.3.2 Bases hilbertiennes

Définition B.17

On appelle ***base hilbertienne*** de $\mathcal{H}$ une famille $(h_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{I}}$ telle que :

i. les éléments de la famille sont unitaires et deux à deux orthogonaux :

$$(h_i, h_j) = \delta_{ij} \tag{B.18}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, prenant la valeur 1 si $i = j$ et 0 sinon.

ii. l'espace vectoriel engendré par la famille $(h_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{I}}$, Vect $(h_i, i \in \mathbb{I})$ est dense dans $\mathcal{H}$, i.e. tout élément de $\mathcal{H}$ est limite d'une suite de Vect $(h_i, i \in \mathbb{I})$.

Remarque B.4

La dernière condition signifie qu'il n'existe pas d'élément non nul de $\mathcal{H}$ qui soit orthogonal à tous les membres de la base hilbertienne $(h_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{I}}$, i.e., pour $x \in \mathcal{H}$:

$$\forall i \in \mathbb{I},\ (x, h_i) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Théorème B.8. *Tout espace de Hilbert séparable admet au moins une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. Soit (v_n) un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{H}$, et H_k l'espace engendré par les $(v_n)_{n\leqslant k}$.

Les H_k forment une suite croissante de sous-espaces de dimension finie tels que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} H_k$ soit dense dans $\mathcal{H}$.

Pour construire la base, on démontre le résultat cherché par récurrence :

au rang 1, $h_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ engendre H_1.

Si on suppose le résultat vrai au rang k, il suffit alors de considérer un élément $v_{k+1} \notin H_k$, puis de compléter la base existante en une base orthonormale de H_{k+1}. ■

Remarque B.5

Dans le cas d'espaces non-séparables (mais complets), il existe toujours des bases hilbertiennes, mais elles ne sont pas dénombrables. La démonstration fait appel au lemme de Zorn [18].

Remarque B.6

Outre certaines bases classiques, les bases hilbertiennes utilisées sont généralement issues de problèmes aux valeurs propres, comme celui de Sturm-Liouville présenté au chapitre 6.2.

Exemple B.9

L'exemple le plus simple de base hilbertienne est la base canonique (e_n) de l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$, définie par :

$$e_n = (\delta_{n,k})_{k\geqslant 0} \tag{B.19}$$

Pour tout entier naturel n, e_n est donc le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la $n^{ième}$.

B.3.3 Égalité de Bessel-Parseval

Proposition B.9. Égalité de Bessel-Parseval

Soit $(h_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{I}}$ une base hilbertienne dénombrable d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Alors, pour toute énumération i_k, $k \in \mathbb{N}$, de l'ensemble $\mathbb{I}$, et pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$, la série de vecteurs de terme général $(x, h_{i_k})\, h_{i_k}$ converge vers x :

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (x, h_{i_k})\, h_{i_k} \tag{B.20}$$

*et l'***égalité de Bessel-Parseval** *est vérifiée :*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{I}} |(x, h_i)|^2 \tag{B.21}$$

Démonstration. Soit $\{i_1, \ldots, i_N\}$, $N \in \mathbb{N}^\star$, un sous ensemble fini d'éléments de $\mathbb{I}$.

Pour $1 \leqslant j \leqslant N$, on pose $x_{i_j} = (x, h_{i_j})$. L'ensemble des indices i_n pour lesquels $x_{i_n} \neq 0$ constitue un sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{I}$.

On commence par montrer que la série de terme général $(x_{i_n} h_{i_n})$ converge.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_{i_n} h_{i_n} \right\|^2 &= \left(\left(x - \sum_{n=1}^{N} x_{i_n} h_{i_n} \right), \left(x - \sum_{n=1}^{N} x_{i_n} h_{i_n} \right) \right) \\ &= \|x\|^2 + \left(\sum_{n=1}^{N} x_{i_n} h_{i_n}, \sum_{n=1}^{N} x_{i_n} h_{i_n} \right) - 2 \left(x, \sum_{n=1}^{N} x_{i_n} h_{i_n} \right) \\ &= \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |x_{i_n}|^2 - 2 \sum_{n=1}^{N} |x_{i_n}|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |x_{i_n}|^2 \end{aligned}$$

La série numérique des $|x_{i_n}|^2$ est constituée de termes positifs (ou nuls) et elle est bornée (par $\|x\|$), elle est donc absolument convergente.

Par suite, la série de terme général $(x_{i_n}\, h_{i_n})$ est de Cauchy, puisque, pour tout entier $N_1 < N$:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_{i_n} h_{i_n} - \sum_{n=1}^{N_1} x_{i_n} h_{i_n} \right\|^2 = \| \sum_{n=N_1+1}^{N} x_{i_n} h_{i_n} \|^2 = \sum_{n=N_1+1}^{N} |x_{i_n}|^2$$

qui tend vers 0 lorsque N_1 tend vers l'infini.

$\mathcal{H}$ étant complet, la série vectorielle de terme général $x_{i_n} h_{i_n}$ converge donc dans $\mathcal{H}$.

Désignons par x' sa limite. On va montrer que $x = x'$.

$(x - x')$ est orthogonal à tout vecteur de la base hilbertienne $(h_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{I}}$, puisque, pour tout entier naturel n :

$$(x - x', h_{i_n}) = (x, h_{i_n}) - \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} (x_{i_k} h_{i_k}, h_{i_n}) = x_{i_n} - x_{i_n} = 0$$

Par suite : $x = x'$.

Il reste à obtenir l'égalité de Bessel-Parseval, que l'on obtient en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_{i_n} h_{i_n} \right\|^2 = \|x\|^2 - \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} |x_{i_n}|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in\mathbb{I}} |x_i|^2 \qquad \blacksquare$$

Exemple B.10 La base hilbertienne des exponentielles complexes

Pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction e_n définie par :

$$e_n(x) = e^{inx}$$

Chaque fonction e_n étant 2π-périodique, il est naturel de considérer sa restriction $\tilde{e}_n$ à $[0, 2\pi]$, et de travailler dans un espace pondéré (de manière à rendre l'intervale $[0, 2\pi]$ de mesure 1).

La famille $(\tilde{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est alors une base hilbertienne de l'espace $L^2_{\frac{1}{2\pi}}([0, 2\pi])$.

B.4 Projection sur un convexe fermé

Théorème B.10. ***Projection sur un convexe fermé***

Soit K un convexe fermé non vide de $\mathcal{H}$. Pour tout x de $\mathcal{H}$, il existe un unique x_0 de K tel que :

$$\|x - x_0\|_{\mathcal{H}} = \min_{k\in K} \|x - k\|_{\mathcal{H}} \tag{B.22}$$

x_0 est la projection de x sur K, notée $P_K(x)$.

Démonstration. *Existence :* soit $d = \inf_{k\in K} \|x - k\|_{\mathcal{H}}$. Il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\|x - k_n\|_{\mathcal{H}} \to d$$

(la suite numérique converge). On va montrer que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{k_m + k_n}{2}$ appartient à K par convexité, et donc :

$$\begin{aligned} d \leqslant \left\| \frac{k_n + k_m}{2} - x \right\|_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \|(k_n - x) + (k_m - x)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \|(k_n - x)\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} \|(k_m - x)\|_{\mathcal{H}} \underset{(n,m)\to\infty}{\longrightarrow} d \end{aligned} \tag{B.23}$$

donc $\left\| \dfrac{k_n + k_m}{2} - x \right\|_{\mathcal{H}} \underset{(n,m)\to+\infty}{\longrightarrow} d$. Par ailleurs, en utilisant l'égalité du parallélogramme, on obtient :

$$\begin{aligned} \|k_n - k_m\|^2_{\mathcal{H}} = \|(k_n - x) - (k_m - x)\|^2_{\mathcal{H}} &= 2\left(\|(k_n - x)\|^2_{\mathcal{H}} + \|(k_m - x)\|^2_{\mathcal{H}}\right) \\ &\quad - \|k_n + k_m - 2x\|^2_{\mathcal{H}} \underset{(n,m)\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned} \tag{B.24}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

La suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy ; comme $\mathcal{H}$ est complet, elle converge dans $\mathcal{H}$: $k_n \to x_0 \in \mathcal{H}$, mais comme $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite du fermé K, alors : $x_0 \in K$.

Unicité : Si on suppose que x_1 et x_0 sont dans K tels que $\|x_1 - x\|_{\mathcal{H}} = \|x_0 - x\|_{\mathcal{H}} = d$ alors, par convexité,

$$d \leqslant \left\| \frac{x_1 + x_0}{2} - x \right\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{1}{2} (\|x_1 - x\|_{\mathcal{H}} + \|x_0 - x\|_{\mathcal{H}}) = d \tag{B.25}$$

L'égalité du parallélogramme

$$\|x_1 - x_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(x_1 - x) - (x_0 - x)\|_{\mathcal{H}}^2$$

permet d'en déduire : $x_1 = x_0$. ■

Le théorème précédent a utilisé les normes, on peut aussi travailler sur les produits scalaires.

Théorème B.11. ***Caractérisation de la projection***

Pour $x \in \mathcal{H}$ donné, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $x_0 \in K$, $\|x - x_0\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|x - y\|_{\mathcal{H}}$, $\forall y \in K$.

ii. $x_0 \in K$, $(x - x_0, y - x_0)_{\mathcal{H}} \leqslant 0$, $\forall y \in K$.

iii. $x_0 \in K$, $(x - y, x_0 - y)_{\mathcal{H}} \geqslant 0$, $\forall y \in K$.

Démonstration.

i. $\Rightarrow$ *ii.* Soit $y \in K$, pour $t \in]0, 1[$, on pose : $Y = t\,y + (1 - t)\,x_0 \in K$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \|x - Y\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|x - x_0 - t\,(y - x_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|x - x_0\|_{\mathcal{H}}^2 - 2t\,(x - x_0, y - x_0)_{\mathcal{H}} + t^2 \|y - x_0\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned} \tag{B.26}$$

et donc :

$$(x - x_0, y - x_0)_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{t}{2} \|y - x_0\|_{\mathcal{H}}^2 \underset{t\to 0}{\to} 0 \tag{B.27}$$

ii. $\Rightarrow$ *iii.* Pour tout y de K :

$$\begin{aligned} (x - y + y - x_0, y - x_0)_{\mathcal{H}} &\leqslant 0 \\ -(x - y, x_0 - y)_{\mathcal{H}} + \|y - x_0\|_{\mathcal{H}}^2 &\leqslant 0 \\ 0 \leqslant \|y - x_0\|_{\mathcal{H}}^2 &\leqslant (x - y, x_0 - y)_{\mathcal{H}} \end{aligned} \tag{B.28}$$

iii. $\Rightarrow$ *ii.* Pour $y \in K$ et $t \in]0,1[$, on considère : $Y = x_0 + t(y - x_0) \in K$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (x - Y, x_0 - Y)_{\mathcal{H}} &= (x - x_0 - t(y - x_0), -t(y - x_0))_{\mathcal{H}} \\ &= -t(x - x_0, (y - x_0))_{\mathcal{H}} + t^2 \|y - x_0\|^2_{\mathcal{H}} \end{aligned} \tag{B.29}$$

On simplifie ensuite par $t > 0$, puis on passe à la limite lorsque $t \to 0$.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Pour tout y de K, on écrit :

$$0 \geqslant (x - x_0, y - x + x - x_0)_{\mathcal{H}} = \|x - x_0\|^2_{\mathcal{H}} + (x - x_0, y - x)_{\mathcal{H}} \tag{B.30}$$

Il en résulte :

$$\|x - x_0\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant (x - x_0, x - y)_{\mathcal{H}} \underset{CS}{\leqslant} \|x - x_0\|_{\mathcal{H}} \|x - y\|_{\mathcal{H}} \tag{B.31}$$

■

Proposition B.12. *P_K est une contraction, i.e. :*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2, \ \|P_K(x) - P_K(y)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|x - y\|$$

Démonstration. Pour tout z de K :

$$(x - P_K(x), z - P_K(x))_{\mathcal{H}} \leqslant 0$$

et, en particulier, pour $z = P_K(y)$

$$(x - P_K(x), P_K(y) - P_K(x))_{\mathcal{H}} \leqslant 0 \qquad (\star)$$

Pour tout z de K :

$$(y - P_K(y), z - P_K(y))_{\mathcal{H}} \leqslant 0$$

et, en particulier, pour $z = P_K(x)$:

$$(y - P_K(y), z = P_K(x) - P_K(y))_{\mathcal{H}} \leqslant 0 \qquad (\star\star)$$

On en déduit, en retranchant membre à membre $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$\|P_K(x) - P_K(y)\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant (x - y, P_K(x) - P_K(y))_{\mathcal{H}} \underset{CS}{\leqslant} \|P_K(x) - P_K(y)\|_{\mathcal{H}} \|x - y\|_{\mathcal{H}} \tag{B.32}$$

■

Un cas particulier est celui où K est un sous-espace vectoriel fermé (que l'on note V).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Corollaire B.13. *Si V est un sous-espace vectoriel fermé, alors :*

$$\forall \phi \in V,\ (x - P_V(x), \phi)_{\mathcal{H}} = 0 \tag{B.33}$$

Autrement dit, $x - P_V(x) \in V^{\perp}$.

Réciproquement, si $x_0 \in V$ et $(x - x_0) \in V^{\perp}$: $x_0 = P_V(x)$. On parle alors de projection orthogonale sur V.

Démonstration. On a $(x - P_V(x), y - P_V(x)) \leqslant 0$, $\forall y \in V$. On pose : $\phi = y - P_V(x)$, ϕ peut décrire tout V. Ainsi :

$$\forall \phi \in V,\ (x - P_V(x), \phi) \leqslant 0$$

Comme l'inégalité est vraie pour ϕ et $-\phi$, cela n'est possible que si, pour tout ϕ de V : $(x - P_V(x), \phi) = 0$. ∎

Théorème B.14. *Si V est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ alors P_V est le seul endomorphisme continu idempotent autoadjoint d'image V :*

$$P_V \text{ projection orthogonale sur } V \iff \begin{cases} P_V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \mathrm{Im}\,(P_V) = V \\ P_V^2 = P_V \\ (P_V(u), v)_{\mathcal{H}} = (u, P_V(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall (u, v) \in \mathcal{H}^2 \end{cases} \tag{B.34}$$

Démonstration. On suppose que P_V est la projection orthogonale sur V.

⇝ La continuité (uniforme) de P_V est obtenue grâce à ses propriétés de contraction, d'après la proposition B.12.

⇝ Linéarité : Soit $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^2$, alors, pour tout ϕ de V :

$$\left.\begin{aligned} (u_1 - P_V(u_1), \phi)_{\mathcal{H}} &= 0 \\ (u_2 - P_V(u_2), \phi)_{\mathcal{H}} &= 0 \\ (u_1 + u_2 - P_V(u_1 + u_2), \phi)_{\mathcal{H}} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (P_V(u_1 + u_2) - (P_V(u_1) + P_V(u_2)), \phi)_{\mathcal{H}} = 0 \tag{B.35}$$

ce qui signifie que $P_V(u_1 + u_2) - (P_V(u_1) + P_V(u_2)) \perp V$ or tous les termes sont dans le sous-espace V donc $P_V(u_1 + u_2) = P_V(u_1) + P_V(u_2)$. En prenant $u_2 = -u_1$ on obtient $P_V(u_1) = -P_V(-u_1)$, en prenant $u_2 = u_1$, on a $P(2u_1) = 2P(u_1)$. Par récurrence : $P(nu_1) = nP(u_1)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En posant $nu_1 = u_2$ on déduit $\frac{1}{n}P(u_2) = P(\frac{u_2}{n})$, et donc par récurrence $P_V(qu_1) = qP_V(u_1)$ avec $q \in \mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et par continuité de P_V, on déduit la linéarité.

$\rightsquigarrow$ Au passage, on voit que comme P_V est contractante : $\|P_V\| \leqslant 1$.

$\rightsquigarrow$ L'idempotence est due au fait que $\mathrm{Im}(P_V) = V$ et que, pour tout v de V : $P_V(v) = v$ (on atteint $\|P_V(v) - v\|_{\mathcal{H}} = 0$). Il en résulte : $P_V^2 = P_V$.

$\rightsquigarrow$ Caractère autoadjoint : si Q est le projecteur orthogonal sur $V^\perp$, alors :

$$\begin{aligned}(P_V(u), v)_{\mathcal{H}} &= (P_V(u), P_V(v) + Q(v))_{\mathcal{H}} = (P_V(u), P_V(v))_{\mathcal{H}} \\ &= (P_V(u) + Q(u), P_V(v))_{\mathcal{H}} = (u, P_V(v))_{\mathcal{H}}\end{aligned} \tag{B.36}$$

Réciproquement, P est un endomorphisme autoadjoint idempotent continu. On pose : $V = P(\mathcal{H})$.

$\rightsquigarrow$ P est un endomorphisme, donc V est un sous-espace vectoriel.

$\rightsquigarrow$ Si $v \in V$, il existe w dans V tel que : $w = Pv = P^2v = Pw$; ainsi, $v \in V \Leftrightarrow v = Pv$.

$\rightsquigarrow$ Si $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ et $(Pv_m)_{m\in\mathbb{N}} \to v$, par continuité :

$$\left(P^2 v_m\right)_{m\in\mathbb{N}} \to Pv$$

et donc $(Pv_m)_{m\in\mathbb{N}} \to Pv$. Ainsi, $v \in V$ et V est fermé.

$\rightsquigarrow$ Comme V est un sous-espace vectoriel fermé, on peut introduire la projection orthogonale P_V sur V et la projection orthogonale Q sur $V^\perp$. Il faut montrer que $P = P_V$.

- Si $v \in V$: $v = Pv$ et $v = P_V v$, ce qui conduit à : $P_V v = Pv$.
- Si $v \in V^\perp$, alors $P_V v = 0$. Or :

$$(Pv, Pv)_{\mathcal{H}} = (v, P^2 v)_{\mathcal{H}} = (v, Pv)_{\mathcal{H}} = 0$$

(car $v \in V^\perp$ et $Pv \in V$). Il en résulte : $P_V v = Pv$.

- Si $v \in \mathcal{H}$, $v = P_V v + Qv$ et on utilise les cas précédents. ■

B.5 Dualité dans les espaces de Hilbert

Théorème B.15. ***Représentation de Riesz***

Soit $\mathcal{H}'$ le dual (topologique) de $\mathcal{H}$, pour $x \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{H}'$ on note $\langle f, x\rangle$ le crochet de dualité et $\|h\|_*$ la norme duale.

Alors, pour tout f de $\mathcal{H}'$, il existe un unique h_f dans $\mathcal{H}$ tel que, pour tout x de $\mathcal{H}$:

$$\langle f, x\rangle = \left(h_f, x\right)_{\mathcal{H}} \tag{B.37}$$

De plus :

$$\|f\|_* = \|h_f\|_{\mathcal{H}}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Réciproquement, pour tout h de $\mathcal{H}$, on définit une forme linéaire continue f_h de la façon suivante :

$$\langle f_h, x\rangle = (h, x)_{\mathcal{H}} \quad \forall x \in \mathcal{H} \tag{B.38}$$

On a alors : $\|f_h\|_* = \|h\|_{\mathcal{H}}$.

Démonstration.

Unicité : si, pour $f \in \mathcal{H}'$, il existe $(h_f^1, h_f^2) \in \mathcal{H}^2$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathcal{H}, \quad \langle f, x\rangle = (h_f^1, x)_{\mathcal{H}} = (h_f^2, x)_{\mathcal{H}}$$

alors : $(h_f^1 - h_f^2, x)_{\mathcal{H}} = 0$.

C'est en particulier vrai pour $x = h_f^1 - h_f^2$, ce qui conduit à : $h_f^1 = h_f^2$.

Existence : si $f = 0$, alors $h_f = 0$ convient. Si $f \neq 0$, $\ker f$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ et $(\ker f)^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de dimension 1. On prend

$$\tilde{h} \in \ker(f)^\perp$$

et on pose :

$$h_f = \frac{\langle f, \tilde{h}\rangle}{\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2}\tilde{h}$$

On a $h_f \in (\ker f)^\perp$, et donc :

- si $x \in \ker f$, $\langle f, x\rangle = 0 = \left(h_f, x\right)_{\mathcal{H}}$.
- si $x \in (\ker f)^\perp$, alors $x = \lambda\tilde{h}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\langle f, x\rangle = \lambda\langle f, \tilde{h}\rangle$$

et

$$\left(h_f, x\right)_{\mathcal{H}} = \frac{\langle f, \tilde{h}\rangle}{\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2}\left(\tilde{h}, \lambda\tilde{h}\right)_{\mathcal{H}}$$

- si $x \in \mathcal{H}$ est quelconque, on le décompose sur $\ker f$ et $(\ker f)^\perp$.

■

Corollaire B.16. *On peut donc identifier un espace de Hilbert et son dual. Un espace de Hilbert est un cas (très) particulier d'espace de Banach réflexif.*

La dualité permet de définir le concept de convergence faible, la proposition suivante montre l'ingrédient à rajouter à la convergence faible pour obtenir une convergence forte :

Proposition B.17. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $\mathcal{H}$ *(autrement dit* $\forall f \in \mathcal{H}'$, $\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$, *ou grâce au théorème de Riesz,* $\forall x \in \mathcal{H}$, $(u_n, x)_{\mathcal{H}} \to (u, x)_{\mathcal{H}}$*) alors* $u_n \to u$ *fortement si et seulement si* $\|u_n\|_{\mathcal{H}} \to \|u\|_{\mathcal{H}}$

Démonstration. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightharpoonup u$ faiblement, alors

$$\|u - u_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u_n\|_{\mathcal{H}}^2 - 2(u, u_n)_{\mathcal{H}} \to \|u\|_{\mathcal{H}}^2 - (\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{\mathcal{H}})^2 \qquad \text{(B.39)}$$

■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ÉLÉMENTS D'INTÉGRATION DE LEBESGUE

C

Cette annexe a pour objectif de donner les principes de la construction de l'intégrale de Lebesgue ainsi que les principaux résultats qui sont utilisés dans les autres chapitres. Peu de résultats sont démontrés, nous recommandons la lecture d'ouvrages spécialisés et plus particulièrement [14].

C.1 MOTIVATION

L'intégrale de Riemann† telle qu'étudiée dans les premières années de Licence, se révèle d'un usage peu pratique :

i. les fonctions intégrables au sens de Riemann doivent être les limites uniformes de suites de fonctions en escaliers, ce qui impose une régularité assez forte aux fonctions à manipuler ;

ii. les extensions aux intégrales sur des domaines 2D ou 3D ne sont pas triviales ;

iii. le traitement des domaines du type $[a, +\infty[$ sur lesquels l'intégrale est définie comme la limite d'intégrales sur des compacts croissants peut poser problème : certaines fonctions oscillantes (telle $f : t \mapsto \sin(t^2)$ qui correspond à un résonateur de Fresnel) dont l'intégrale de Riemann sur un domaine infini existe ($\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, alors que le système est constamment accéléré) pose des difficultés d'interprétation physique ;

iv. pour un domaine donné, l'ensemble des fonctions intégrable au sens de Riemann ne peut être muni d'une structure topologique « pratique » (les espaces ne peuvent être complets au sens de normes usuelles).

L'intégrale de Lebesgue‡ permet de lever ces difficultés :

i. le domaine d'intégration est « quelconque », le travail en dimension supérieure à 1 ne pose pas de difficulté ;

†. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), mathématicien allemand. Outre ses travaux sur l'intégration, il a créé la théorie des fonctions algébriques, et développé les travaux de Cauchy sur les fonctions de variables complexes ; en géométrie différentielle, il introduit le concept de *variété*, qui conduira, ultérieurement, à la géométrie riemannienne.

‡. Henri-Léon Lebesgue (1875-1941), mathématicien français, dont la contribution à la théorie de l'intégration fut essentielle.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

ii. les fonctions qui interviennent dans la définition sont beaucoup plus générales (fonctions mesurables) ;

iii. on approxime les fonctions par « en-dessous », le cas échéant on n'hésitera pas à écrire $\int f = +\infty$;

iv. l'intégrale de Lebesgue conduit à définir des espaces de Banach et de Hilbert très pratiques.

La construction de la théorie des probabilités et l'intégration de Lebesgue possèdent des fondations communes (théorie de la mesure).

Notation

Dans la suite, on note $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ la droite numérique achevée. Cet ensemble sert à manier des grandeurs pouvant être infinies.

C.2 Rapide construction de l'intégrale de Lebesgue

Dans ce qui suit, Ω désigne une partie non vide de $\mathbb{R}^d$.

C.2.1 Tribu borélienne, mesure de Lebesgue

Définition C.1

Une ***σ-algèbre*** (ou ***tribu***) est un ensemble de sous-ensembles de Ω stable par complémentation (dans Ω) et union dénombrable (et donc intersection dénombrable).

On construit ainsi la σ-algèbre $\mathbb{B}$ (tribu borélienne) et l'application λ (mesure de Lebesgue) qui vérifient les propriétés suivantes :

i. $\mathbb{B}$ contient les ouverts de Ω ;

ii. $\lambda : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^+$ est une forme positive ;

iii. soit b une boule de Ω (donc $b \in \mathbb{B}$), λ est tel que $\lambda(b) = \text{volume}(b)$,

iv. si $(b_n) \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2\ b_i \cap b_j = \emptyset$, alors $\lambda(\bigcup_{\mathbb{N}} b_i) = \sum_{\mathbb{N}} \lambda(b_i)$ (additivité dénombrable).

v. soit $b \in \mathbb{B}$ tel que $\lambda(b) = 0$, si $a \subset b$ alors $a \in \mathbb{B}$ (et bien sûr $\lambda(a) = 0$) (on dit que $(\Omega, \mathbb{B}, \lambda)$ est un espace mesuré complet).

La mesure de Lebesgue peut donc être vue comme la généralisation de la notion de longueur d'un intervalle ou d'aire d'une surface, applicable à des ensembles très variés (les boréliens représentent une famille de parties de Ω très grande).

Remarque C.1

Pour les théorèmes qui suivent (notamment sur le calcul d'intégrales multiples), il est intéressant de remarquer que la mesure de Lebesgue est σ-finie : on peut construire un recouvrement de Ω par des boréliens de mesure finie.

Il existe des boréliens de mesure nulle. On dira qu'une propriété est vraie presque partout si elle est vraie partout sauf sur un ensemble de mesure nulle. Dans le cas de la mesure de Lebesgue, les ensembles de mesure nulle les plus classiques sont les unions dénombrables de singletons (par exemple $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$). Il existe d'autres ensembles de mesure nulle mais ils sont plus étranges (ce sont des fractales comme l'ensemble triadique de Cantor). Typiquement, deux fonctions qui sont égales sauf en quelques points sont égales presque partout.

Exemple C.1

Une fonction f continue nulle presque partout est nulle partout.

En effet, soit ω l'ensemble de mesure nulle où f n'est pas nulle : $\omega = f^{-1}(\mathbb{R}^*)$; or, $\mathbb{R}^*$ est ouvert, la continuité de f implique que ω est ouvert.

On peut donc faire rentrer une boule ouverte dans ω, mais elle doit être de rayon nul, puisque :

$$0 = \lambda(\omega) \geqslant \lambda(\text{boule})$$

Par suite : $\omega = \emptyset$.

C.2.2 Fonctions mesurables et étagées

Définition C.2

Dans un espace mesurable $(\Omega, \mathbb{B})$, une fonction numérique $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est ***mesurable*** si, pour tout ouvert $\omega \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega) \in \mathbb{B}$.†

Remarque C.2

Il est à noter que les fonctions mesurables sont très générales : tout d'abord construire un ensemble qui n'est pas un borélien est difficile (mais faisable), ensuite l'existence de fonctions non mesurables repose dans $\mathbb{R}$ sur l'hypothèse (indécidable) du *continuum* infini de Cantor et dans $\mathbb{R}^d$ sur l'axiome du choix.
On peut donc considérer que toutes les fonctions que nous utilisons sont mesurables.

Définition C.3

Une fonction f est dite ***étagée*** s'il existe une partition finie de Ω en boréliens telle que f soit constante sur chacun de ces boréliens.

†. La mesurabilité est la seule régularité requise pour envisager d'intégrer des fonctions au sens de Lebesgue. En particulier les fonctions continues sont mesurables.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Remarque C.3

Une fonction étagée est bien entendue mesurable.

Proposition C.1. *L'ensemble des fonctions étagées est* dense *dans l'ensemble des fonctions mesurables au sens de la convergence simple. De plus, les fonctions mesurables bornées sont limites uniforme de suites de fonctions étagées.*

Démonstration. Sans restreindre les résultats généraux (voir ce qui suit), on ne considérera, ici, que le cas des fonctions mesurables positives.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on partitionne l'espace image $[0, +\infty[$ en $2^{2n} + 1$ sous intervalles $I_{n,k}$:

$$I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[\text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant 2^{2n},\ I_{n,2^{2n}+1} = [2^n, +\infty[$$

Les ensembles antécédents sont les $A_{n,k} = f^{-1}(I_{n,k})$ (autrement dit, sur $A_{n,k}$, pour $k \leqslant 2^{2n} : k - 1 \leqslant 2^n f \leqslant k$ et $2^{2n} \leqslant f$ sur $A_{n,2^{2n+1}}$), les $A_{n,k}$ sont des boréliens puisque f est mesurable. On pose[†]

$$f_n = \sum_{k=1}^{2^{2n+1}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}}$$

$f_n \leqslant f$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ simplement : en effet, en un point x, dès que $f(x) < 2^n$, on a $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2^{-n}$; si f est bornée, alors il suffit de choisir n tel que $2^n > \sup|f|$; on obtient ainsi la convergence uniforme. ■

C.2.3 Intégration

La construction de l'intégrale se fait en plusieurs étapes :

i. Pour une fonction étagée positive f : f vaut f_k sur le borélien b_k ; les (b_k) partitionnent Ω, on pose alors :

$$\int_\Omega f d\lambda = \sum_k f_k \lambda(b_k)$$

Il est à noter que :

$$0 \leqslant \int_\Omega f d\lambda \leqslant \infty$$

ii. Pour une fonction mesurable positive f : $\int_\Omega f d\lambda = \sup \int_\Omega \phi d\lambda$ avec ϕ étagée sur $(\Omega, \mathbb{B})$ et $0 \leqslant \phi \leqslant f$ presque partout sur Ω.

†. $\chi(A)$ est la fonction indicatrice de A, elle vaut 1 sur A, 0 ailleurs.

iii. Pour une fonction mesurable réelle f, on définit ses parties positive et négative respectivement par :

$$f^+ = \sup(f, 0) \ , \ f^- = \sup(-f, 0)$$

f est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont et :

$$\int_\Omega f d\lambda = \int_\Omega f^+ d\lambda - \int_\Omega f^- d\lambda$$

iv. Pour une fonction mesurable f à valeurs complexes, on intègre partie réelle et imaginaire séparément.

Définition C.4

Une fonction **positive** est dite intégrable au sens de Lebesgue si $\int_\Omega f d\lambda < +\infty$.

Proposition C.2. *Une fonction est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si ses parties positives et négatives sont intégrables, autrement dit si :*

$$\int_\Omega |f| d\lambda < +\infty \qquad \text{(C.1)}$$

Remarque C.4

Le symbole $\int_\Omega f d\lambda$ existe donc pour les fonctions positives (dans ce dernier cas la valeur $+\infty$ est autorisée) et pour les fonctions intégrables (auquel cas $\left|\int_\Omega f d\lambda\right| \leqslant \int_\Omega |f| d\lambda < +\infty$).

C.3 Résultats importants

Proposition C.3.

i. $f \underset{pp}{=} 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |f| d\lambda = 0$

ii. *f et g intégrables,* $f \underset{pp}{\leqslant} g \Rightarrow \int_\Omega f d\lambda \leqslant \int_\Omega g d\lambda$

iii. *Pour prouver qu'une fonction f est Lebesgue-intégrable sur Ω, il suffit de trouver g intégrable majorant $|f|$ ($g \underset{pp}{\geqslant} |f|$).*

iv. *Linéarité : si f et g sont intégrables sur Ω et si a est un réel, $(f+ag)$ est intégrable et* $\int_\Omega (f + ag) d\lambda = \int_\Omega f d\lambda + a \int_\Omega g d\lambda$

v. *f intégrable* $\Rightarrow \left|\int_\Omega f d\lambda\right| \leqslant \int_\Omega |f| \, d\lambda$

Théorème C.4. ***Convergence monotone de Lebesgue***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives :

$$\forall x \in \Omega \ : \ 0 \leqslant f_0(x) \leqslant f_1(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n d\lambda = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda \in \bar{\mathbb{R}}^+ \tag{C.2}$$

Lemme C.5. ***Lemme de Fatou (version fonctions intégrables)***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables. Alors :

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n d\lambda \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n d\lambda \leqslant \limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n d\lambda \leqslant \int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} f_n d\lambda \tag{C.3}$$

Théorème C.6. ***Convergence dominée de Lebesgue***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Ω :

$$\forall x,\ f_n(x) \to f(x)$$

S'il existe une fonction g intégrable sur Ω telle que, pour tout entier naturel n :

$$|f_n(x)| \leqslant g(x)$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n d\lambda = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda \tag{C.4}$$

Corollaire C.7. ***Continuité sous le signe $\int$***

Soit $f(x,t)$ une fonction de $\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ on suppose que sur un voisinage V_0 de x_0 :

i. $\int_\Omega f(x,t)d\lambda_t$ existe pour tout x de V_0 ;

ii. $x \mapsto f(x,t)$ est continue (pour presque tout t) et il existe une fonction g de la variable t, intégrable sur Ω, telle que :

$$\forall x \in V_0 \ :\ |f(x,t)| \leqslant g(t)$$

alors $x \mapsto \int_\Omega f(x,t)d\lambda_t$ est continue en x_0 et prend la valeur $\int_\Omega f(x_0,t)d\lambda_t$ en x_0.

Corollaire C.8. ***Dérivabilité sous le signe $\int$***

Soit f une fonction de $\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que sur un voisinage de V_0 de x_0 :

i. $\int_\Omega f(x,t)d\lambda_t$ existe pour tout x de V_0 ;

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe (pour presque tout t), et il existe une fonction g de la variable t, intégrable sur Ω, telle que :

$$\forall x \in V_0 \ :\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t)$$

alors : $x \mapsto \int_\Omega f(x,t)d\lambda_t$ *est dérivable et*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_\Omega f(x,t)d\lambda_t\right) \underset{x=x_0}{=} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)d\lambda_t \tag{C.5}$$

C.4 Comparaison Riemann-Lebesgue

Théorème C.9. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, si* f *est Riemann-intégrable sur le segment* $[a,b]$*, alors* f *est Lebesgue-intégrable et* $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

Théorème C.10. *Si* $\int_a^\infty |f(x)|dx$ *existe (au sens de Riemann) alors* f *est intégrable sur* $[a,\infty[$ *(au sens de Lebesgue) et* $\int_a^\infty f(x)dx = \int_{[a,\infty[} f d\lambda$.

Exemple C.2

$x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$, mais pas Lebesgue-intégrable.

On peut donc écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}\,dx$ (au sens de Riemann) ou $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{[-a,+a]} f d\lambda$ (au sens de Lebesgue), mais pas $\int_{\mathbb{R}}$ ... qui n'a pas de sens.

C.5 Intégrales multiples

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ *peut être construite à partir de la notion de mesure produit : on commence par des ensembles de la forme* $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $\mathbb{B} = \mathbb{B}_x \times \mathbb{B}_y$ *et* $\lambda = \lambda_x \otimes \lambda_y$ *(ce qui signifie* $\lambda(b_x, b_y) = \lambda_x(b_x)\lambda_y(b_y)$ *et qui revient, pour Riemann, à écrire* $dS = dxdy$*), puis on étend à des formes plus générales. On peut alors s'intéresser à l'intégrale de fonctions mesurables sur* $(\Omega, \mathbb{B})$.

Notation

On pose :

$$\begin{cases} I = \int_\Omega f d(\lambda_x \otimes \lambda_y) \\ I_{yx} = \int_{\Omega_x} \left(\int_{\Omega_y} f d\lambda_y\right) d\lambda_x \\ I_{xy} = \int_{\Omega_y} \left(\int_{\Omega_x} f d\lambda_x\right) d\lambda_y \end{cases} \tag{C.6}$$

Théorème C.11. ***Théorème de Tonelli***

Si $f(x,y) \geqslant 0$*, alors :* $I = I_{xy} = I_{yx} \in \bar{\mathbb{R}}^+$.

Théorème C.12. ***Théorème de Fubini***

Si f *est intégrable sur* Ω*, alors :* $I = I_{xy} = I_{yx} \in \mathbb{R}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Exemple C.3

On considère la fonction f définie par : $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Le calcul montre que :

$$I_{xy} = -I_{yx}$$

ce qui s'explique par le fait que :

$$\int_{\Omega} |f| d(\lambda_x \otimes \lambda_y) = +\infty$$

La fonction n'est pas, de fait, Lebesgue-intégrable.

Remarque C.5

La démarche pour calculer une intégrale multiple consiste donc à calculer d'abord l'intégrale de la valeur absolue (grâce au théorème de Tonelli) : si le résultat est infini, la fonction n'est pas intégrale, sinon elle l'est et on peut appliquer le théorème de Fubini (à la fonction sans valeur absolue).

Théorème C.13. *Changement de variables*

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n \mapsto (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in \tilde{\Omega}_1 \times \ldots \times \tilde{\Omega}_n$ *un* C^1*-difféomorphisme. On pose :*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$$

Alors

$$\int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n} f(x_1, \ldots, x_n) d(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n) = \int_{\tilde{\Omega}_1 \times \ldots \times \tilde{\Omega}_n} \tilde{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} \right) \right| d(\tilde{\mu}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{\mu}_n)$$

Remarque C.6

On reconnaît le Jacobien du changement de variables ; la valeur absolue est une différence par rapport à Riemann, elle est due au fait que les domaines d'intégration ne sont pas parcourus selon une orientation donnée.

C.6 Espaces de Lebesgue

Définition C.5

i. Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$.

ii. Pour $p = \infty$, on note $\|f\|_{L^\infty} = \text{supess}_{\Omega} |f| = \inf\{C \geqslant 0 / |f| \underset{pp}{\leqslant} C\}$

iii. Soit $l^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions telles que $\|f\|_{L^p} < +\infty$.

Un problème avec ces espaces est que $\|f\|_{L^p} = 0 \Rightarrow f \underset{pp}{=} 0$, *et l'application* $\|\cdot\|_{L^p}$ *ne sépare pas des éléments égaux presque partout (des éléments non nuls, mais nuls presque partout, prennent pour valeur zéro). Pour palier ce problème, on quotiente l'espace par la relation* $\underset{pp}{=}$ *et on définit alors l'espace* $L^p(\Omega)$. *Cette espace est formé des classes d'équivalence de l'égalité presque-partout, si* $(f, g) \in l^p(\Omega)^2$ *avec* $f \underset{pp}{=} g$ *alors* f *et* g *sont représentés par le même élément dans* $L^p(\Omega)$.

Définition C.6 Espace de Lebesgue

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on pose $L^p(\Omega) = l^p(\Omega)_{|\underset{pp}{=}}$.

On va prouver que l'espace $L^p(\Omega)$ *ainsi défini est un espace vectoriel et que l'application* $f \mapsto \|f\|_{L^p}$ *est une norme. Les caractères positif, défini et homogène de l'application sont évidents, tout comme la non-vacuité de l'espace et sa stabilité par multiplication par un scalaire. Il reste à prouver l'inégalité triangulaire (qui impliquera la stabilité de l'espace par l'addition), qui est démontrée à l'aide du résultat intermédiaire suivant.*

Proposition C.14. *Inégalité de Hölder*

Pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *et* p' *tel que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *soit* $f \in L^p$ *et* $g \in L^{p'}$.

Alors : $fg \in L^1$ *et :*

$$\int_\Omega |fg| d\lambda = \|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \tag{C.7}$$

Démonstration. *i.* Si $\|f\|_{L^p} = 0$, $f \underset{pp}{=} 0$, et donc $fg \underset{pp}{=} 0$ et l'inégalité est vérifiée.

ii. Si $\|f\|_{L^p} = +\infty$, le terme de droite est infini et l'inégalité est vérifiée.

iii. Si $p = \infty$, alors, $q = 1$, et : $|fg| < \|f\|_{L^\infty} |g|$. L'inégalité est bien vérifiée.

iv. Considérons le cas où $p \neq 1$, $p \neq \infty$ et où l'on peut supposer (quitte à normaliser les fonctions) que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{p'}} = 1$.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^{+\star}$, par concavité du logarithme :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p) + \left(1 - \frac{1}{p'}\right)\ln(b^{p'}) = \ln(ab)$$

puisque $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Par suite :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\,\dagger$$

†. Inégalité d'Young.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On en déduit :

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'}$$

puis, en intégrant :

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$ ■

Preuve de l'inégalité triangulaire. On fait la démonstration pour $1 \leqslant p < \infty$, le cas $p = \infty$ étant plus classique. On montre d'abord la stabilité de l'espace par addition : pour $(f, g) \in L^p(\Omega)^2$, comme $p > 1$ on a convexité de la fonction puissance p donc $|\frac{f}{2} + \frac{g}{2}|^p \leqslant \frac{|f|^p}{2} + \frac{|g|^p}{2}$ et $|f + g|^p \leqslant 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$. Donc $\|f + g\|_{L^p} < \infty$, et par la relation d'Holder, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{L^p}^p &= \int_\Omega |f + g|^p d\lambda \\
&\leqslant \int_\Omega (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\lambda \\
&\leqslant \left(\left(\int_\Omega |f|^p d\lambda\right) + \left(\int_\Omega |g|^p d\lambda\right)\right)\left(\int_\Omega |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\lambda\right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$ ■

Les espaces de Lebesgue sont complets pour la norme qui leur est associé, ce qui en fait d'excellents outils pour les méthodes d'approximations.

Proposition C.15.

i. $(L^p(\Omega), \| \|_{L^p})$ *est un espace de Banach pour* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

ii. $\left(L^2(\Omega), \| \|_{L^2}\right)$ *est un espace de Hilbert, de produit scalaire associé*

$$(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle_L^2 = \int_\Omega f\bar{g} d\lambda \tag{C.8}$$

Démonstration. Pour $1 \leqslant p < \infty$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $L^p(\Omega)$.

On peut donc en extraire une sous-suite (f_{n_k}) telle que :

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k}$$

Posons :

$$S_K(f) = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{K-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_K}$$

et :

$$S_K(g) = |g_{n_1}| + \sum_{k=1}^{K-1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\|S_K(g)\|_{L^p} \leqslant \|f_{n_1}\|_{L^p} + \sum_{k=1}^{K-1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} = \|f_{n_1}\|_{L^p} + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{2^k}$$

La suite $(\|S_K(g)\|_{L^p})$ est donc croissante et bornée par $\|f_{n_1}\|_{L^p} + 1$, ce qui montre d'après le théorème de convergence monotone que $S_\infty(g)$ existe et appartient à $L^p(\Omega)$.

En remarquant que $|S_K(f)| \leqslant S_\infty(g)$, on obtient, grâce au théorème de convergence dominée, la convergence de la série $S_K(f) = f_{n_K}$ vers une fonction $f \in L^p(\Omega)$.

Pour revenir à la suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour $N(k) > n_{k+1}$ fixé :

$$\|f_{N(k)} - f_{n_k}\|_{L^p} < \frac{1}{2^k}$$

En passant à la limite lorsque n_k tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\|f_{N(k)} - f\| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

ce qui prouve la converge de la suite vers f.

L'étude de la série $S_K(f)$ est laissée à la charge du lecteur dans le cas $p = +\infty$. ■

À partir de la preuve précédente, on obtient le résultat suivant qui montre que la convergence au sens de la norme L^p implique la convergence simple (presque partout) :

Proposition C.16. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de L^p, et f une fonction de L^p, telles que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$.*

Alors, il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) telle que

$$\begin{aligned} f_{n_k}(x) &\to f(x) \text{ presque partout sur } \Omega \\ |f_{n_k}(x)| &\underset{pp}{\leqslant} g(x) \text{ avec } g \in L^p(\Omega) \end{aligned} \tag{C.9}$$

Notation

Fonctions localement intégrables

On désigne par L^1_{loc} l'espace des fonctions intégrables sur tout compact. L'idée est de s'affranchir des problèmes à l'infini.

Typiquement, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \notin L^1([0, +\infty[)$, mais $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Exemple C.4

La fonction de Heaviside dans $\mathbb{R}$, qui vaut 0 sur $\mathbb{R}^-$ et 1 sur $\mathbb{R}^+$, est une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

A ce titre, elle est utilisée comme une distribution (voir le chapitre 4).

En tant que fonction de L^1_{loc}, il est important de noter que parler de sa valeur en 0 n'a pas de sens ($\{0\}$ étant un ensemble de mesure nulle).

Remarque C.7

Il n'y a pas de résultat général d'inclusion des espaces, sauf si on travaille sur un ensemble de mesure finie ($\lambda(\Omega) < \infty$) auquel cas si $p \leqslant q$ on a $L^q \subset L^p$ (application de l'inégalité de Hölder avec la fonction indicatrice du domaine).

Exemple C.5

i. $r \mapsto \dfrac{1}{r^k}$ est dans $L^p([1, +\infty[)$ pour $p > 1$.

iii. $r \mapsto \dfrac{1}{r^{1/k}}$ est dans $L^p(]0, 1])$ pour $1 < p < k$.

C.7 PRODUIT DE CONVOLUTION DE DEUX FONCTIONS

Définition C.7

Étant données deux fonctions u et v de $\mathbb{R}^d$, on pose :

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)d\lambda_y \tag{C.10}$$

Proposition C.17. *Sens de l'expression – Inégalité d'Young*

Soient $1 \leqslant p, q, r < \infty$ *tels que* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

Alors :

$$\|u * v\|_{L^r} \leqslant \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q} \tag{C.11}$$

En particulier, si $u \in L^p$ *et* $u \in L^q$, *alors* $u * v \in L^r$, *et* $(u, v) \in (L^1)^2 \Rightarrow u * v \in L^1$.

Démonstration. (Dans le cas L^1)

$$\|u * v\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)d\lambda_y \right| d\lambda_x \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |u(x-y)v(y)|\, d\lambda_y d\lambda_x$$

On peut appliquer le théorème de Tonelli :

$$\|u * v\|_{L^1} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x-y)|\, d\lambda_x \right) |v(y)|\, d\lambda_y = \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^1}$$ ■

Définition C.8 Support d'une fonction

Le ***support*** d'une fonction continue f est l'adhérence de l'ensemble des points où elle n'est pas nulle.

$$\text{supp}(f) = \text{Adh}\left(\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}\right) \tag{C.12}$$

Remarque C.8

On a bien sûr $\text{supp}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \subset \text{supp}(f)$, le support est réduit par dérivation. En effet, sur l'ouvert $\Omega \setminus \text{supp}(f)$, on a $f = 0$, ce qui implique $f_{,x} = 0$.

Proposition C.18. ***Propriétés de base***

i. $u * v = v * u$

ii. $\text{supp}(u * v) \subset \text{supp}(u) + \text{supp}(v)$

iii. $(u * v) * w = u * (v * w)$

Proposition C.19. ***Régularisation***

Soit u et v deux fonctions de L^1 à support compact. Alors :

i. *$u * v$ est à support compact.*

ii. $u \in C^0 \Rightarrow u * v \in C^0$.

iii. *si* $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ *existe et* $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^1$ *alors* $\dfrac{\partial (u * v)}{\partial x}$ *existe et* $\dfrac{\partial (u * v)}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} * v$.

Démonstration. Il s'agit d'une application directe du corollaire du théorème de convergence dominée de Lebesgue : $(x, y) \mapsto u(x - y)v(y)$ est dérivable par rapport à x ; le support des fonctions étant compact, la dérivée est intégrable. ■

Cette dernière propriété est fondamentale : *le produit de convolution a la régularité de la plus régulière des fonctions.*

C.8 Résultats de densité et de séparabilité

Théorème C.20. *L'espace des fonctions continues à support compact est dense dans L^p pour $1 \leqslant p < \infty$ (au sens de la convergence forte de L^p).*

Démonstration. La preuve fait appel au théorème d'Urysohn, qui permet de construire des fonctions continues dont on contrôle la valeur sur des ensembles donnés. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Théorème C.21. *Les espaces L^p sont* **séparables** *(ils contiennent des sous-espaces denses dénombrables) pour* $1 \leqslant p < +\infty$. †

Démonstration. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$.

Grâce à la densité, on peut trouver une fonction continue à support compact f_1 de $C_c^0(\Omega)$ telle que :

$$\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$$

Soit Ω' un ouvert borné tel que $\text{supp}(f_1) \subset \Omega' \subset \Omega$.

La méthode employée pour démontrer la proposition C.1 permet de construire une fonction étagée f_2 (prise dans un ensemble dénombrable), à support dans Ω', proche de f_1 (au sens de la norme sup, puisque f_1 est continue sur un compact), et telle que :

$$|f_2(x) - f_1(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda(\omega')^{1/p}}$$

Ainsi :

$$\|f - f_2\|_{L^p} \leqslant \|f - f_1\|_{L^p} + \|f_1 - f_2\|_{L^p} \leqslant 2\varepsilon$$ ■

†. L^∞ n'est pas séparable.

PROPRIÉTÉS DE L'ESPACE DE SOBOLEV $H^1(\Omega)$

D

On s'intéresse aux propriétés de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ et des fonctions qu'il contient. Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (d est la dimension de l'espace physique, en général 2 ou 3).

Rappelons la définition de $H^1(\Omega)$.

Définition D.1

On désigne par $H^1(\Omega)$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions qui peuvent s'identifier à une fonction de $L^2(\Omega)$ et dont la dérivée (au sens des distributions) peut s'identifier à une fonction de $L^2(\Omega)$.

D.1 STRUCTURE ALGÉBRIQUE

Proposition D.1. *$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini, pour tout (u, v) de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, par :*

$$\begin{aligned}(u, v)_{H^1} &= (u, v)_{L^2} + (\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v))_{(L^2)^d} \\ &= \int_\Omega u\, v\, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx\end{aligned} \tag{D.1}$$

La norme associée est donc définie, pour tout u de $H^1(\Omega)$, par :

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}^2} \tag{D.2}$$

Remarque D.1

Pour tout u de $H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^1} \geqslant \|u\|_{L^2} \text{ et } \|u\|_{H^1} \geqslant \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d} \tag{D.3}$$

Il en résulte :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|u\|_{L^2} + \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}\right) \leqslant \|u\|_{H^1} \leqslant \|u\|_{L^2} + \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d} \tag{D.4}$$

Démonstration. On commence par vérifier que $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel, ou plutôt un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ (l'inclusion est dans la définition). Si u et v

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

sont des fonctions de $H^1(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ un scalaire, il est évident que $(u+\alpha v) \in L^2(\Omega)$. On sait que $\partial_i u$ et $\partial_i v$ sont dans l'espace vectoriel $L^2(\Omega)$, et que la dérivation (faible) est une application linéaire† donc $\partial_i(u + \alpha v) = (\partial_i u + \alpha \partial_i v)$ qui est donc dans $L^2(\Omega)$. Donc $H^1(\Omega)$ est bien stable par l'addition interne et la multiplication par un scalaire, c'est un espace sous-vectoriel de $L^2(\Omega)$.
Par ailleurs, l'application

$$(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto (u, v)_{H^1}$$

est clairement bilinéaire, symétrique, définie positive. C'est donc un produit scalaire.

Il reste à vérifier la complétude. À cet effet, on considère une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H^1(\Omega)$:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ /\ n > N_0\,,\ m > N_0 \Longrightarrow \|u_n - u_m\|_{H^1} < \varepsilon \qquad \text{(D.5)}$$

d'après la remarque, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_i u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy, chacune dans $L^2(\Omega)$ qui est complet. Elles convergent donc dans $L^2(\Omega)$: désignons par

$$u = \lim_{n\to+\infty} u_n \quad , \quad U_i = \lim_{n\to+\infty} \partial_i u_n$$

leurs limites respectives. Il reste à montrer que $U_i = \partial_i u$. On raisonne par densité.

L'injection de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est continue, ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_i u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme la dérivation est continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors :

$$\partial_i u_n \to \partial_i u$$

et donc : $U_i = \partial_i u$.

Ainsi, la suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien dans $H^1(\Omega)$, qui est donc un espace complet. ■

Remarque D.2

Il est possible de définir des espaces d'ordre supérieur $H^p(\Omega)$ ($p \in \mathbb{N}$) : ce sont des espaces de distributions tels que toutes les dérivées faibles d'ordre inférieur ou égal à p soient dans $L^2(\Omega)$. On peut également définir des espaces d'ordre fractionnaire (notamment en utilisant la notion de dérivation fractionnaire, la transformation de Fourier ou l'interpolation entre espaces). On peut aussi munir ces espaces d'une structure hilbertienne.

Il est d'ores et déjà possible de prouver la continuité de la forme linéaire et de la forme bilinéaire dans le cas de l'équation de Poisson (8.8). L'ingrédient fondamental

†. La notation $\partial_i u$ signifie $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

est l'inégalité de Cauchy-Schwarz (notée CS dans les formules) :

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \quad |l(v)|^2 = \left|\int_\Omega f\, v\, dx\right|^2 \underset{CS}{\leqslant} \int_\Omega |f|^2\, dx \int_\Omega |v|^2\, dx \\ = \|f\|_{L^2}^2 \|v\|_{L^2}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}^2 \|v\|_{H^1}^2 \tag{D.6}$$

ou encore :

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \tag{D.7}$$

de même pour tout (u, v) de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$:

$$|a(u,v)|^2 = \left|\int_\Omega \operatorname{grad}(u) \cdot \operatorname{grad}(v) dx\right|^2 \underset{CS}{\leqslant} \int_\Omega |\operatorname{grad}(u)|^2\, dx \int_\Omega |\operatorname{grad}(v)|^2\, dx \\ = \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}^2 \|\operatorname{grad}(v)\|_{(L^2)^d}^2 \tag{D.8}$$

et donc :

$$|a(u,v)| \leqslant \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \tag{D.9}$$

D.2 Régularité des fonctions, notion de trace

On s'intéresse maintenant aux propriétés des membres de $H^1(\Omega)$. En raison de démonstrations très techniques, un certain nombre de résultats seront admis.

Pour cette question, la forme du domaine doit être prise en compte. On commence par le cas plus simple : $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Une première proposition qui se démontre classiquement par troncature et régularisation est la suivante :

Proposition D.2. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^d)$.*

Les théorèmes qui suivent permettent de mieux qualifier les fonctions de $H^1(\mathbb{R}^d)$ en termes de dérivabilité classique et d'intégrabilité. Une propriété remarquable est la dépendance par rapport à la dimension de l'espace.

Théorème D.3. ***Théorème de plongement de Sobolev***

Pour $s > \dfrac{d}{2} + k$:

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d)$$

Ce théorème est utile pour donner une régularité classique (dérivabilité forte) aux solutions des formulations faibles : on prouve qu'elles appartiennent à des espaces de Sobolev et automatiquement, on obtient une régularité classique. En particulier, on a les résultats suivant en dimension 1 d'espace : $H^1(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$ et $H^2(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R})$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Théorème D.4. *Si $d > 2$:*

$$H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^d) \quad \textit{pour } 2 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{d}}$$

le symbole de l'inclusion avec une flèche signifiant que l'injection est continue.

Ce théorème montre donc que l'existence d'une dérivée faible L^2 permet de gagner en intégrabilité (mieux que L^2).

Il faut maintenant traiter le cas des domaines ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ plus généraux. La description de tels domaines est assez lourde. L'idée est de recouvrir Ω par des ouverts sur lesquels on peut définir des paramétrages simples (le domaine est décrit par un atlas de cartes locales). Sur le bord de Ω, on souhaite pouvoir localement, via un difféomorphisme, ramener le domaine à un demi-espace infini (Figure D.1).

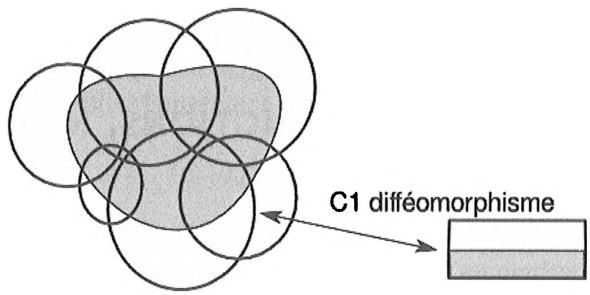


Figure D.1 - Cartes locales d'un ouvert

Dans ce qui suit, nous travaillerons systématiquement sur des domaines « suffisamment réguliers ». En particulier, on évitera les domaines qui ne sont pas que d'un côté de leur bord (Figure D.2), ainsi que les bords fractaux.

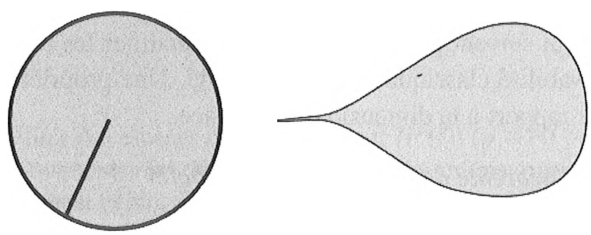


Figure D.2 - Exemples de domaines non-réguliers

La question fondamentale, pour traiter des problèmes avec conditions aux limites, est la possibilité de définir une valeur sur le bord du domaine pour des fonctions de $H^1(\Omega)$. La question n'est pas triviale puisque, typiquement, on n'est pas capable de définir la valeur d'une fonction de $L^2(\Omega)$ sur un bord (qui est un ensemble de mesure

volumique nulle), l'existence d'une dérivée faible L^2 qui va permettre de définir une valeur au bord.

Définition D.2

Désignons par $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ la restriction à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Il faut bien comprendre qu'il s'agit d'une nouvelle notation : pour Ω ouvert, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans Ω. Comme $\bar{\Omega}$ n'est pas un ouvert, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est un objet mathématique différent. En particulier, les fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ peuvent avoir des valeurs non nulles sur $\partial\Omega$.

Théorème D.5. *$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$ pour $m \geqslant 1$.*

Pour toute fonction définie sur Ω, sa **trace** est la fonction restreinte (ou prolongée) définie sur le bord du domaine (sous réserve d'existence).

On va se ramener à une configuration simple (quitte à utiliser une carte locale sur un domaine suffisamment régulier). Dans $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^\star$, on pose $x = (x', x_d)$, soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^\star$, on veut pouvoir définir la fonction v, trace de u, en $x_d = 0 : v(x') = u(x', 0)$. Il faut distinguer les cas suivants :

- si $u \in C^0(\mathbb{R}^d)$, alors v est bien définie et $v \in C^0(\mathbb{R}^{d-1})$.
- si $u \in C^0(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^\star)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x_d}$ existe et est bornée lorsque $x_d \to 0$, alors v est bien définie (prolongement par continuité).
- si $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^\star})$ on peut définir :

$$\gamma_0 \,:\, u \mapsto \gamma_0(u) \quad \text{avec} \quad \gamma_0(u)(x') = u(x', 0) \tag{D.10}$$

γ_0 est linéaire de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^\star})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$, on l'appelle *application trace* (d'ordre 0).

Proposition D.6.

i. *γ_0 est continue de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^\star})$ (muni de la topologie de $H^1(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^\star)$) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$ (muni de la topologie de $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$).*

ii. *γ_0 se prolonge en une application linéaire continue surjective de $H^1(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^\star)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$.*

iii. *$\ker \gamma_0 = H_0^1(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^\star)$, où on rappelle que $H_0^1(\Omega)$ a été défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Proposition D.7.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

i. L'espace trace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (qui peut être défini intrinsèquement par transformée de Fourier) coïncide avec les traces de fonctions de $H^1(\Omega)$. Toute fonction de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est la trace d'au moins une fonction de $H^1(\Omega)$.

ii. $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$.

iii. $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est un espace Hilbert pour le produit scalaire défini, pour tout $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$:

$$(f,g)_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = (f,g)_{L^2(\partial\Omega)} + \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{|x-y|^d} dS_x dS_y \quad \text{(D.11)}$$

Terminons par quelques propriétés et notations.

Proposition D.8. *Le prolongement canonique*

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) &\to H^m(\mathbb{R}^d) \\ u \mapsto \hat{u} &= \begin{cases} u \text{ dans } \Omega \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \end{aligned} \quad \text{(D.12)}$$

est continu. De plus, pour tout u de $H^m(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\hat{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$$

Définition D.3

On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme duale.

Proposition D.9. ***Théorème de Rellich***

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ alors, les applications :

$$H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \quad , \quad H_0^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \quad \text{(D.13)}$$

sont des injections compactes.

Ces propriétés sont utiles lors de l'étude du spectre de certains opérateurs.

D.3 Inégalités de Poincaré

Les inégalités de Poincaré jouent un rôle fondamental en analyse fonctionnelle. Elles permettent de borner la norme d'une fonction par des quantités dépendant de la norme du gradient et de la géométrie du domaine. C'est un résultat assez intuitif, proche des accroissements finis (la variation d'une fonction C^1 est inférieure à la valeur absolue de la plus grande dérivée multipliée par la largeur du segment d'étude) mais, bien sûr, un peu plus technique à obtenir au vu des faibles hypothèses sur les fonctions en jeu.

D.3.1 Dans $H_0^1(\Omega)$

L'intérêt de H_0^1 vient du fait que la fonction est nulle sur $\partial\Omega$; il est clair qu'elle ne peut grandir (en norme) que si son gradient est suffisamment grand, ou si le domaine est grand. C'est ce que l'on va préciser dans le cas d'un domaine borné dans au moins une direction.

Définition D.4

Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que $|\xi| = 1$ (on note avec une simple barre la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$), et $]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle de mesure finie non nulle :

$$0 < \text{mes}(]a, b[) = h < +\infty$$

On définit la bande de $\mathbb{R}^d$ de largeur h dans la direction ξ par :

$$B_h(\xi) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,/\, a < x \cdot \xi < b \right\} \tag{D.14}$$

où le point représente le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^d$.

Proposition D.10. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $\Omega \subset B_h(\xi)$ (cf figure D.3), alors*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{h^2}{2} \|\text{grad}(u)\|_{(L^2)^d}^2 \tag{D.15}$$

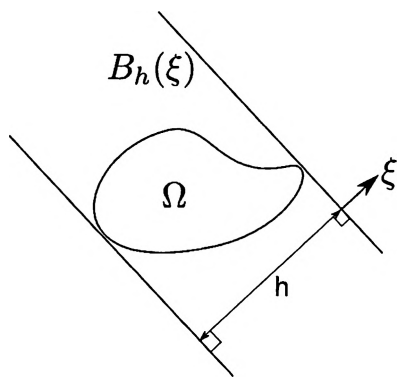


Figure D.3 - Domaine inclus dans une bande

Démonstration. Par densité, on peut raisonner sur $u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$u(x + t\xi) = \int_a^t [\text{grad}(u)(x + \sigma\xi)] \cdot \xi \, d\sigma \tag{D.16}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Il en résulte, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |u(x+t\xi)|^2 &\leqslant |t-a| \int_a^t \left|\operatorname{grad}(u)(x+\sigma\xi)\right|^2 d\sigma \\ &\leqslant |t-a| \int_a^b \left|\operatorname{grad}(u)(x+\sigma\xi)\right|^2 d\sigma \end{aligned} \tag{D.17}$$

On peut paramétrer Ω en utilisant l'hyperplan P orthogonal à ξ ; si $y \in \Omega$, il se décompose de la façon suivante : $y = x + t\xi$ avec $x \in P$ et $t \in]a, b[$. Si une fonction $f \in L^2(\Omega)$, on peut intégrer son carré en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^2 dy &= \int_{x\in P} \int_{t\in]a,b[} |u(x+t\xi)|^2 dt\, dx \\ &\leqslant \int_{t\in]a,b[} |t-a|\, dt \int_{x\in P} \int_{\sigma=a}^{\sigma=b} \left|\operatorname{grad}(u)(x+\sigma\xi)\right|^2 d\sigma dx \end{aligned} \tag{D.18}$$

Ainsi :

$$\|u\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{h^2}{2} \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}^2 \tag{D.19}$$

■

Corollaire D.11. *Si Ω est inclus dans une bande de largeur h, alors l'application*

$$u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle.

Démonstration. Pour tout u de $H_0^1(\Omega)$:

$$\|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}^2 \leqslant \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}^2 + \|u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^1}^2 \leqslant \left(1 + \frac{h^2}{2}\right) \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}^2 \tag{D.20}$$

■

Si on revient à l'exemple initial de l'équation de Poisson avec condition de Dirichlet homogène, on en déduit la coercivité de la forme bilinéaire a :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega),\ a(u,u) = \int_\Omega \operatorname{grad}(u)^2\, dx \geqslant \frac{1}{1+\frac{h^2}{2}} \|u\|_{H^1}^2 \tag{D.21}$$

D.3.2 Dans $H^1(\Omega)$

Dans $H^1(\Omega)$, la difficulté est que la fonction peut être « grande », même pour un petit gradient (il faut imaginer tout simplement une fonction constante). On doit donc ajouter un contrôle sur la fonction, classiquement, on utilise la moyenne.

Théorème D.12. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ tel que l'injection de $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ soit compacte (ce que l'on appelle un ouvert de Nikodyn). Alors :*

i. Il existe $P_\Omega > 0$ tel que pour $u \in H^1(\Omega)$ avec $\int_\Omega u\,dx = 0$:

$$\|u\|_{L^2}^2 \leqslant P_\Omega \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}^2 \tag{D.22}$$

ii. Il existe $P_\Omega > 0$ tel que pour $u \in H^1(\Omega)$, alors, :

$$\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{\operatorname{mes}(\Omega)} \left| \int_\Omega u\,dx \right|^2 \leqslant P_\Omega \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}^2 \tag{D.23}$$

Démonstration. Le premier résultat est admis, le deuxième en découle simplement ; on pose, pour tout u de $H^1(\Omega)$:

$$\bar{u} = \frac{1}{\operatorname{mes}(\Omega)} \int_\Omega u dx$$

Alors, $(u - \bar{u})$ satisfait les hypothèses du premier résultat, et :

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\bar{u}\|_{L^2}^2 - 2\,\bar{u} \int_\Omega u = \|u\|_{L^2}^2 - \operatorname{mes}(\Omega)\bar{u}^2 \tag{D.24}$$

■

Définition D.5

La meilleure (plus petite) constante P_Ω est appelée *constante de Poincaré.*

Corollaire D.13. *L'application $u \mapsto \|\operatorname{grad}(u)\|_{(L^2)^d}$ est une norme équivalente à la norme usuelle sur le sous-espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ de moyenne nulle.*

Une autre façon de se débarrasser des fonctions constantes est de contrôler la valeur de la fonction sur le bord du domaine. On dispose alors du théorème suivant (admis).

Théorème D.14. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Il existe $P_\Omega > 0$ tel que pour $u \in H^1(\Omega)$:*

$$\|u\|_{L^2}^2 \leqslant P_\Omega \left(\|\operatorname{grad}(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \tag{D.25}$$

Ce résultat peut être amélioré en prenant en compte que d'un bout du bord de mesure non-nulle.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin. « Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations », *Grundlehren der mathematischen Wissenchaften*, 343. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[2] F. Black, M. Scholes. « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *J. Pol, Econ*, 81. 1973, pages 637-659.

[3] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications (3ème édition)*. Dunod, 2005.

[4] G. Choquet. *Cours de Topologie (2ème édition)*. Dunod, 2000.

[5] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*. Wiley-VCH, édition de 1989.

[6] R. Dautray, J. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Elsevier-Masson, 1997.

[7] L. Di Menza. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Cassini, 2009.

[8] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus (4ème édition)*. Dunod, 2013.

[9] Y. V. Egorov, M. A. Shubin. *Foundations of the Classical Theory of Partial Differential Equations*. Springer, 1998.

[10] L. C. Evans. « Partial differential equations », volume 19 of *Graduate studies in mathematics*. American mathematical society, 1998.

[11] C. Even, P. Pieranski. « Entendre la forme d'un tambour », *Images de la Physique*. 1998.

[12] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dovers Publications, 1953.

[13] M. Kac. « Can one hear the shape of a drum ? », *American Mathematics Monthly*, 73 (1). 1966.

[14] N. Lerner. *A course on Integration Theory : Including more than 150 Exercises with Detailed Answers*. Springer Basel, 2014.

[15] R. C. Merton, « Theory of Rational Option Pricing », *Bell J. Econ and Management Sci.*, 4. 1973, pages 141-183.

[16] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe : cours et exercices (3ème édition)*. Dunond, 2009.

[17] L. Schwartz. *Analyse-topologie générale et analyse fonctionnelle (2ème édition)*. Hermann, 1980.

[18] K. Yosida. *Functional Analysis (6th edition)*. Springer, 1980.

[19] C. Zuily. *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Cassini, 2011.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

INDEX

Symbols

σ-algèbre 242

A

abscisse d'existence 92
Application trace 259

B

Banach-Picard 191
base hilbertienne 230

C

Céa 201
Coercivité 188
condition aux limites
  de Cauchy, 2, 160, 161, 164, 165
  de Dirichlet, 3
  de Fourier, 3
  de Neumann, 3
  relèvement, 126
condition initiale 2
Constante de Poincaré 263
Contraction 235
convergence faible 62
convolution
  d'une distribution et d'une fonction, 70
  de deux distributions, 71
  de deux fonctions, 252
courbes caractéristiques 26, 37, 38

D

d'alembertien 159
décomposition de fractions rationnelles en éléments simples 98
Dépendance continue de la solution 194
déphasage
  transformée de Fourier, 84
  transformée de Laplace, 93
difféomorphisme 216
dilatation
  transformée de Fourier, 84
  transformée de Laplace, 93
distribution
  à support compact, 64
  association avec une fonction, 62
  conjugaison, 63
  de Dirac, 63, 74, 76
  de Heaviside, 63, 74, 76, 252
  de Poisson, 101
  positive, 64
  tempérée, 73
domaine de dépendance 164
dyade 118

E

équation
  d'advection, 5
  de Burgers, 157
  de la chaleur, 8, 100, 164
  de Laplace, 166, 177
  de transport, 5, 153
  des ondes, 11, 159–161
espace
  complet, 227
  de Banach, 227
  de Hilbert, 228
  de Lebesgue, 248
  de Schwartz, 73
  des fonctions à décroissance rapide, 73
  séparable, 226, 253

F

fonction
  étagée, 243
  à variables séparées, 117
  analytique, 4
  de Bessel, 124
  de Green, 76
  harmonique, 169
  localement intégrable, 251

mesurable, 243
sphérique, 168
forme standard 42
elliptique, 44
hyperbolique, 43
parabolique, 44
Formulation faible 186
Formulation variationnelle 189
formule
d'Ostrogradsky, 169
de Bessel-Parseval, 231
de d'Alembert, 159, 162, 164
de Green, 169
de Parseval, 87
de Plancherel, 87
de Poisson, 177

H

Hadamard 15

I

identité de polarisation 224
inégalité
d'Young, 252
de Cauchy-Schwarz, 223
de Hölder, 249
Inégalités de Poincaré 260
intégrabilité au sens de Lebesgue 245

L

laplacien sur la sphère 168
Lax-Milgram 193, 194
lemme de Fatou 246

M

mesure
de Lebesgue, 242
superficielle, 167
multientier 58

N

norme 221
noyau de la chaleur 165

O

opérateur de Laplace-Beltrami 168
Ouvert de Nikodyn 263

P

peigne de Dirac 101
pied d'une caractéristique 26
polynômes
d'Hermite, 123
de Laguerre, 124
de Legendre, 123
principe d'incertitude d'Heisenberg 102
principe du maximum 177
problème aux frontières
du deuxième type, 3
du premier type, 3
du troisième type, 3
problème bien posé 3
problème de Cauchy 26, 35
produit scalaire 222
produit tensoriel 118
Projection sur un convexe fermé 233

R

régularisation 253
radialisation 167
Rellich 260
Riesz 192
Riez 237

S

saut 67
solution élémentaire 172
solutions radiales 170
Stampacchia 190, 195
Sturm-Liouville
opérateur, 120
problème périodique, 122, 125
problème régulier, 121, 132
support

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

d'une distribution, 64
d'une fonction, 253
symétrisée
d'une distribution, 70
d'une fonction, 70
transformée de Fourier, 84

T

théorème
d'Urysohn, 253
de Cauchy-Kowalewski, 28
de convergence dominée, 246
de convergence monotone, 245
de Fubini, 247
de la valeur finale, 95
de la valeur initiale, 95
de Tonelli, 247
des fonctions implicites, 217
Théorème de Lax-Milgram sur un convexe fermé 194
Théorème de plongement de Sobolev 257
Théorème de représentation de Riesz 237
Théorème de Stampacchia 190
Théorème du point fixe de Banach-Picard 191
Trace 259
transformée de Fourier 83, 161, 164
co-transformation, 84
formule d'échange, 84
Fourier-Plancherel, 88
inversion, 86, 165
transformée de Laplace 90
du Dirac, 92
inversion, 96
translation
de distribution, 69
de fonction, 69
transformée de Fourier, 84
transformée de Laplace, 93
tribu 242

V

valeur principale de $\frac{1}{x}$ 75

72746 - (I) - (1,2) - OSB 80° - EPS - JRF

JOUVE
1, rue du Docteur Sauvé, 53100 MAYENNE
N° 2223070B
Dépôt légal : août 2015
Dépôt légal 1re édition : 2012

Imprimé en France

SCIENCES SUP

- MATHÉMATIQUES
- PHYSIQUE
- CHIMIE
- SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
- INFORMATIQUE
- SCIENCES DE LA VIE
- SCIENCES DE LA TERRE

Claire David
Pierre Gosselet

Équations aux dérivées partielles

Cours et exercices corrigés

2e édition

Cet ouvrage, destiné aux étudiants en Licence de sciences ainsi qu'aux élèves ingénieurs, est une introduction à l'étude des équations aux dérivées partielles.

Il est articulé en trois parties : présentation des résultats généraux pour les équations d'ordre 1 et 2, analyse spectrale (transformation de Laplace, transformation de Fourier), et enfin quelques exemples classiques d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de la chaleur, équation des ondes.

Cette nouvelle édition augmentée intègre un chapitre d'introduction aux approches variationnelles ainsi que de nouveaux exercices dont certains corrigés développés sont disponibles sur le site dunod.com.

Claire David
Maître de conférences à l'UPMC (Paris) au laboratoire Jacques-Louis Lions.

Pierre Gosselet
Chargé de recherche au CNRS.
Chargé de cours à l'ENS de Cachan.

LICENCE MASTER DOCTORAT
1 2 3 4 5 6 7 8

Les actus du savoir

9 782100 727469

5789119
ISBN 978-2-10-072746-9

DUNOD
dunod.com